Una incursión en la obra matemática de Luis Vigil

Francisco Marcellán

Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) y Departamento of Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

Research Meeting on Approximation Theory, E.I.T.A. 2014
En el centenario del nacimiento de D. Luis Vigil y Vázquez (1914-2003)
Alquézar, 17-19 de Octubre de 2014.

Outline

Outline

Luis Vigil y polinomios ortogonales

Articulos L. Vigil (MathSciNet): 29

- Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad.
- Polinomios ortogonales respecto a medidas soportadas sobre curvas del plano complejo.

17 artículos sobre estos tópicos.

Primeros articulos

1. A functional identity in the theory of orthogonal polynomials[a]
2. On formal properties of orthogonal polynomials.
    1. Summation and recurrence
    2. Zeros and Christoffel constants[b]

Colaboradores: M. P. Alfaro (9), M. Alfaro (1), J.J. Guadalupe (1).

[a] Rev. Acad. Ciencias Madrid **60**, 1966
[b] Rev. Acad. Ciencias Madrid **63**, 1969

Mis artículos favoritos

1. Orthogonal polynomials on real algebraic curves, Proc XI Annual Conference of Spanish Mathematicians (Murcia 1970). Universidad Complutense de Madrid 1973.
2. Correspondance entre suites de polynômes orthogonaux et fonctions de la boule unité de H_0^∞. In Proceedings Bar-le-Duc 1984. Lect. Notes in Math. **1171**, Springer-Verlag Berlin 1985. (Con M. Alfaro, M. P. Alfaro, J. J. Guadalupe).
3. Solution of a problem of P. Turán on zeros of orthogonal polynomials on the unit circle, J. Approx. Theory **53**(1988) (Reviewer: W. Van Assche)

Outline

Proyecto/Programa de trabajo de L. Vigil (1970)

1. Matriz de momentos como matriz estructurada.
2. Problema de momentos como un problema inverso (determinar la medida y su curva soporte).
3. Propiedades estructurales de polinomios ortogonales (fórmulas de recurrencia y sumación).
4. Problema inverso.
5. Localización de ceros de polinomios ortogonales.
6. Extensión típica: Interpolación y cuadratura.

Polinomios ortogonales sobre curvas algebraicas

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \sum_{0 \leq k,j \leq N} a_{k,j} z^k \bar{z}^j = 0\}$$
$$= \{z \in \mathbb{C} : D(z, \bar{z}) = 0\},$$

donde

$$D(z,w) = \sum_{0 \leq k,j \leq N} a_{k,j} z^k w^j .$$

Sea μ una medida de probabilidad soportada en γ

$$\sum_{0 \leq k,j \leq N} a_{k,j} c_{k+l,j+i} = 0,$$

donde

$$c_{l,i} = \int_\gamma z^l \bar{z}^i d\mu$$

La matriz de Gram respecto a la base canónica $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se denomina matriz D-estructurada o matriz relativa a la curva γ.

Ejemplo

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ *Circunferencia unidad.*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ *Recta real.*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ *Unión de circunferencia unidad y recta real.*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ *Lemniscata de Bernoulli.*

Sea $a(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_N \neq 0$.

- **Curvas algebraicas armónicas** $\text{Im} a(z) = 0$. (J. Vinuesa, Diciembre 1973)

$$D = a e_1^* - e_1 a^*$$

- **Curvas equipotenciales polinómicas** $|a(z)| = 1$. (F. Marcellán, Diciembre 1976).

$$D = a a^* - e_1 e_1^*$$

  En todos los casos anteriores, Rank$D = 2$!!

- **Curvas equipotenciales racionales** $|a(z)| = |b(z)|$. (L. Moral, Mayo 1983).

definición

*Se dice que una sucesión de polinomios ortogonales (**SPO**)* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisface una relación de recurrencia si existe un número natural h tal que*

$$P_{n+h}(z) = \sum_{j=0}^{h-1} \alpha_{h,j}(z) P_{h+j}(z)$$

donde los $\alpha_{h,j}(z)$ *son polinomios de grado independiente de* n *y, a lo más* $h-j$*.*

Problema

¿ Todas las **SPO** relativas a curvas algebraicas reales poseen fórmulas de recurrencia?

definición

Una **SPO** $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ *posee una fórmula de sumación si existe un número natural* k *tal que*

$$K_{n+k}(z,y) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \overline{Q_{n+i}(y)} P_{n+i}(z)}{R(z,y)}$$

siendo $Q_{n+i}(z), R(z,y)$ *polinomios en una y dos variables, respectivamente, y* $K_n(x,y)$ *es el* n*-núcleo reproductor.*

Problema

¿Todos las **SPO** relativas a curvas algebraicas poseen fórmulas de sumación?

Interpretación matricial de las formulas de sumación: Inversión de matrices D-estructuradas cuya inversa es D-Bézoutiana (G. Heinig 1991)

Outline

1. Extensión natural de la recta real. El operador de multiplicación por $a(z)$ es simétrico

   $\Longrightarrow$
   - Relación de recurrencia.
   - Fórmula de sumación.
   - Equivalencia entre ambas.

2. $a(z)P_n(z) = \sum_{i+1}^{N} A_{n-i}^{(i)} P_{n-i}(z) + \sum_{i=0}^{N} A_n^{(i)} P_{n+i}(z)$ con $A_n^{(0)} \in \mathbb{R}$
3. α-matriz de Jacobi de orden N i.e. matriz hermitiana (2N+1) banda.
4. $K_{n(z,y)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{l=n-i+1}^{n} A_l^{(i)} \overline{\hat{P}_l(y)} \hat{P}_{l+i}(z) - \overline{A_l^{(i)}} \hat{P}_l(z) \overline{\hat{P}_{l+i}(y)}}{a(z) - \overline{a(y)}}$.

Ejemplo

Hipérbolas equiláteras.

Recta del plano complejo.

Outline

Curvas equipotenciales polinómicas

1. Extensión natural de la circunferencia unidad. El operador de multiplicación por $a(z)$ es unitario.

   $\Longrightarrow$
   - Relación de recurrencia.
   - Fórmula de sumación
   - Equivalencia entre ambas.

2. $a(z)P_n(z) = a_N P_{n+N}(z) + \sum_{k=1}^{N} \lambda_{n,k} K_{n-1}(z, \alpha_k)$, donde $a(z) = a_N \prod_{j=1}^{N} (z - \alpha_j)$
3. Matriz de Hessenberg de orden N.
4. fórmula de sumación

$$K_{n(z,y)} = \frac{a(z)\overline{a(y)} \sum_{j=n-N+1}^{n} \overline{\hat{P}_j(y)}\hat{P}_j(z) - \sum M_{k,k}^{(n)} K_n(z, \alpha_k)\overline{K_n(y, \alpha_k)}}{a(z)\overline{a(y)} - 1}$$

Outline

Curvas equipotenciales racionales $|a(z)| = |b(z)|$

Idea clave:

Perturbación de medidas

$$P_n(z) \longrightarrow d\mu$$
$$Q_n(z;s) \longrightarrow |s(z)|^2 d\mu$$

con $\deg s(z) = h$ y $s(z) = s_h \prod_{j=1}^{h}(z-\alpha_j)$.

Proposición (Extensión de la fórmula de Christoffel)

$$s(z)Q_n(z;s) = s_h P_{n+h}(z) + \sum_{j=1}^{h} \lambda_{n,j} K_{n+h-1}(z,\alpha_j)$$

considerar $\begin{matrix} s(z) = a(z) \\ s(z) = b(z) \end{matrix}$ con $Q_n(z;a) = Q_n(z;b)$

Outline

Extensiones de productos escalares sobre curvas.

definición

Dada una matriz HDP $m_{n-1} = [c_{p,q}]_{p,q=0}^{n-1}$ *a toda matriz HDP* m_n *obtenida orlando la matriz* m_{n-1} *con fila y columna* n*-ésimas se llama extensión de* m_{n-1}.

definición

Si m_{n-1} *es una matriz relativa a* γ *y* m_n *es una extensión también relativa a* γ *se dice que* m_n *es una* γ*-extensión de* m_{n-1}.

definición

Dada una n-upla $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n\}$ con $\alpha_i \neq \alpha_k$ y $\{p_1, p_2 \ldots, p_n\}$ reales positivos, se llama típico el producto escalar definido en $\mathbb{P}_n$ mediante

$$\left\langle z^h, z^k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} p_j \alpha_j^h \overline{\alpha}_j^k \quad (h,k) \neq (n,n)$$

$$\langle z^n, z^n \rangle = e_n + \sum_{j=1}^{n} p_j \alpha_j^n \overline{\alpha}_j^n$$

Proposición

1. $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)$.
2. Las raíces de $P_k(z)$ $(1 \leq k \leq n-1)$ se encuentran en el interior de la envoltura convexa de $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n\}$.

3 Dado un producto escalar en $\mathbb{P}_{n-1}$ mediante una matriz de Gram HDP y dados n números complejos distintos $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n\}$ y un $e_n > 0$, la condición necesaria y suficiente para que $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - \alpha_k)$ sea el $n$ésimo polinomio ortogonal de grado n en una extensión típica de $\mathbb{P}_{n-1}$ a $\mathbb{P}_n$ es que los polinomios de la base de Lagrange asociada a $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n\}$ constituyan un sistema ortogonal en $\mathbb{P}_{n-1}$.

4 Dado un producto escalar en $\mathbb{P}_{n-1}$, a cada $\alpha \in \mathbb{C}$ con $P_{n-1}(\alpha) \neq 0$ y cada $e_n > 0$ le corresponde una extensión típica

$$P_n(z;\alpha) = (z - \alpha)\frac{K_{n-1}(z;\alpha)}{\overline{P_{n-1}(\alpha)}}.$$

Teorema (J. Vinuesa ,1984)

$m_n = [c_{p,q}]_{p,q=0}^{n}$, $n \geq 2N-1$, *es una extensión* γ*-típica de su submatriz principal de orden* $n-1$ *si y solo si las raíces de dicha extensión pertenecen a la curva* γ

$$\Downarrow$$

Fórmulas de cuadratura en la recta real y la circunferencia unidad.

Generalización al caso de ceros múltiples. Su conexión con discretizaciones de productos de Sobolev. (A. Cachafeiro, F. Marcellán, 1990)

Outline

Problemas inversos y recurrencias

Si una familia de polinomios satisface una relación de recurrencia, ¿Existe un producto escalar respecto al que estos polinomios son ortogonales.? ¿Qué se puede decir de las medidas de ortogonalidad y de su soporte?

Favard: $xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x)$, $n \geq 1$, $b_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$ existe una medida de probabilidad no trivial μ soportada en la recta real tal que

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) d\mu = \delta_{n,m}.$$

P. L. Duren (1965): Sea γ una curva analítica de Jordan en el plano complejo y w una función continua y positiva en γ. Sea $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios ortonormales sobre la curva respecto al peso w i.e. $\int_\gamma P_n(z)\overline{P_m(z)}w(z)|dz| = \delta_{n,m}$ satisfaciendo una relación de recurrencia

$$\alpha_n P_{n-1}(z) + (\beta_n - z)P_n(z) + \gamma_n P_{n+1}(z) = 0$$

$P_n(z) = k_n z^n +$términos de grado menor, $k_n > 0$.

Entonces γ es una elipse y las sucesiones $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, están acotadas

Ingrediente básico: G. Szegő

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} = \psi(z), \quad z \text{ en el exterior de } \gamma,$$

donde $\psi(z)$ es la aplicación conforme del exterior de γ en el exterior del disco unidad.

A. J. Durán (1993)

Determinación de un producto escalar tal que la sucesion de polinomios ortonormales satisfaga una relación de recurrencia

$$x^N p_n(x) = c_{n,0} p_n(x) + \sum_{l=1}^{N} \left[c_{n,l} p_{n-l}(x) + c_{n+l,l} p_{n+l}(x) \right] \quad \text{con} \quad c_{n,N} \neq 0.$$

Proposición

Existen funciones μ_0 y $\mu_{m,m'}$, $1 \leq m, m' \leq N-1$, con $\mu_{m,m'} = \mu_{m',m}$ tal que los polinomios $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ son ortogonales respecto a la forma bilineal

$$B(f,g) = \int f(t)g(t)d\mu_0 + \int V_n(f) dM V_n(g)^T$$

donde

$$dM = \begin{pmatrix} d\mu_{0,0} & \dots & d\mu_{0,N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ d\mu_{N-1,0} & \dots & d\mu_{N-1,N-1} \end{pmatrix},$$

$$V_N(f) = (T_{0,N}, T_{1,N}(f), \ldots T_{N-1,N}(f))$$

donde para $f(x) = \sum_i a_i x^i$,

$$T_{m,N}(f)(x) = \sum_i a_{iN+m} x^{iN+m}.$$

Proposición

Son equivalentes los siguientes enunciados

1. *El operador x^N es simétrico respecto a B y además $B(x^N f, xg) = B(xf, x^N g)$.*
2. *Existe una función μ y una matriz $M \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ tales que*

$$B(f,g) = \int fg d\mu + \left(f^{(1)}(0) \cdots f^{(N-1)}(0)\right) M \begin{pmatrix} g^{(1)}(0) \\ \vdots \\ g^{(N-1)}(0) \end{pmatrix}.$$

Si, además $B(x^k, x^m) = B(1, x^{k+m})$ $1 \leq k, m \leq N-1$, entonces M

Sea $h(x)$ un polinomio de grado N. Considérese la base de $\mathbb{P}$
$\mathfrak{B}_h = \{x^k h^n(x); k = 0, 1, \ldots, N-1, n \in \mathbb{N}\}$. Si $p \in \mathbb{P}$

$$p(x) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k \geq 0} a_{m,k} x^m h^k(x).$$

(Tesis de L. Vigil "Sobre series de Jacobi" 1950)

Teorema

Son equivalentes los siguientes enunciados

1. $B(hf, g) = B(f, hg)$ *para todo polinomio* f, g.
2. *Existen funciones* μ_0 *y* $\mu_{m,m'}$, $1 \leq m, m' \leq N-1$, *con* $\mu_{m,m'} = \mu_{m',m}$ *tales que*

$$B(f, g) = \int fg d\mu_0 + \sum_{1 \leq m \leq m' \leq N-1} \int T_{m,h}(f)(x) T_{m',h}(g)(x) d\mu_{m,m'}.$$

Outline

Sea $R_{n,h}(p)(x) = \sum_{k\geq 0} a_{n,k}x^k$. Dado que $p(x) = \sum_{n=0}^{N-1} x^n R_{n,h}(p)[h(x)]$ definamos

$$S_n(x) = \begin{pmatrix} R_{0,h}(p_{nN}) & R_{1,h}(p_{nN}) & \cdots & R_{N-1,h}(p_{nN}) \\ R_{0,h}(p_{nN+1}) & R_{1,h}(p_{nN+1}) & \cdots & R_{N-1,h}(p_{nN+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{0,h}(p_{nN+N-1}) & R_{1,h}(p_{nN+N-1}) & \cdots & R_{N-1,h}(p_{nN+N-1}) \end{pmatrix},$$

$$S_n[h(x)] \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{nN}(x) \\ P_{nN+1}(x) \\ \vdots \\ P_{nN+N-1}(x) \end{pmatrix}$$

Curvas algebraicas armónicas: $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ define una sucesión de polinomios ortogonales matriciales sobre la recta real (F. Marcellán, G. Sansigre, 1993).

Curvas equipotenciales polinómicas: $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ define una sucesión de polinomios ortogonales matriciales sobre la circunferencia unidad (F. Marcellán, I. Rodríguez, 1989).

Polinomios ortogonales tipo Sobolev: $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ define una sucesión de polinomios ortogonales matriciales sobre la recta real perturbando la medida con una masa matricial (A. J. Durán, W. Van Assche, 1995).

Outline

Medida de probabilidad no trivial	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	Matriz de momentos (Toeplitz)	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	Coeficientes de Schur

Función de Caratheódory $F(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	Función de Schur $(1+F(z))(1+f(z)) = 2$

Fórmulas de recurrencia para SPOM sobre la circunferencia unidad.

$$\phi_{n+1}(z) = z\phi_n(z) + \phi_{n+1}(0)\phi_n^*(z)$$
$$\phi_{n+1}(z) = (1 - |\phi_n(0)|^2)z\phi_n(z) + \phi_{n+1}(0)\phi_{n+1}^*(z)$$

Teorema de Favard. Dada $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $|\alpha_n| < 1$ existe una medida de probabilidad no trivial μ soportada en la circunferencia unidad tal que $\phi_n(0) = \alpha_n, n \geq 1$, siendo $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la **SPOM** respecto a μ.

$$\Omega_n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\left(\phi_n(e^{i\theta}) - \phi_n(z)\right) d\mu(e^{i\theta})$$

Caracterización de la SPOM sobre la circunferencia unidad OPUC F. Peherstorfer, R. Steinbauer, 1995

$$\phi_n(z)F(z) + \Omega_n(z) = O(z^n)$$
$$\phi_n^*(z)F(z) - \Omega_n^*(z) = O(z^{n+1})$$

1. F es analítica en D con $ReF(z) > 0$ en D.
2. f es analítica en D con $f(0) = 0$ y $|f(z)| < 1$ en D.

$$\mu' = ReF(e^{i\theta}) = \frac{1 - |f(e^{i\theta})|^2}{|1 + f(e^{i\theta})|^2}$$

Proposición (M. Alfaro, M. P. Alfaro, J. J. Guadalupe, L. Vigil, 1985)

1. Sea $f \in B(H_0^\infty)$. $(\phi_n(0))_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ si y solo si $\ln(1-|f|) \in L^1(\mu)$.
2. μ es singular si y solo si f es una función interior i.e. $|f(e^{i\theta})| = 1$ a.e.
3. μ es absolutamente continua si y solo si
$$Re \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1+f(e^{i\theta})} d\theta = 0.$$
4. $\mu(\{e^{i\theta_0}\}) > 0$ si y solo si $\text{lím}_{r\to 1}(1-r)\frac{1-|f(re^{i\theta_0})|^2}{|1+f(re^{i\theta_0})|^2} > 0$. Además
$$\mu(\{e^{i\theta_0}\}) = 2\pi \lim_{r\to 1} \frac{1-r}{1+f(re^{i\theta})}$$

Ceros

- $\phi_n(\alpha) = 0 \Longrightarrow |\alpha| < 1$.
- Existe una correspondencia biunívoca entre los parámetros de Schur y los ceros de $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De hecho, si $\phi_{n+1}(z_{n+1}) = 0$, entonces

$$\phi_{n+1}(0) = -\frac{z_{n+1}\phi_n(z_{n+1})}{\phi_n^*(z_{n+1})}.$$

- Ceros como valores propios de submatrices principales de matrices infinitas asociadas al operador de multiplicación

GGT $\longrightarrow$ ortogonalización de $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$
CMV $\longrightarrow$ ortogonalización de $\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2} \ldots\}$.

Polinomios para-ortogonales (W. Jones, O. Njastad, W. Thron, 1989)

Dado $|\tau_{n+1}| = 1$ se define

$$\psi_{n+1}(z;\tau_{n+1}) = z\phi_n(z) + \tau_{n+1}\phi_n^*(z)$$

1. $\left\langle \psi_{n+1}(z;\tau_{n+1}), z^k \right\rangle = 0$ para $1 \leq k \leq n$.
2. Si $\psi_{n+1}(\alpha;\tau_{n+1}) = 0$ entonces $|\alpha| = 1$. Los ceros de $\psi_{n+1}(z;\tau_{n+1})$ son unitarios y simples y se entrelazan con los ceros de $\psi_n(z;\tau_n)$.
3. $$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})d\mu(\theta) = \sum_{k=1}^{n} f(z_{n,k};\tau_n)\Lambda_{n,k}$$
   para toda $f \in \Lambda_{-n,n}$ (Extensión típica en la circunferencia unidad).
4. $$\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{n,k}\delta(z - z_{n,k}) \xrightarrow{*} d\mu.$$

GRACIAS POR VUESTRA ATENCIÓN