Fórmulas de cuadratura positivas en la circunferencia unidad con nodos prefijados

Francisco José Perdomo Pío

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna

Preprint: Positive quadrature formulas on the unit circle with preescribed nodes. A new approach.

Colaboración: R. Cruz-Barroso y C. Díaz Mendoza

Objetivos

Sea μ una medida en $[-\pi, \pi]$.

$$I_\mu(f) := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\mu(\theta) \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(z_k) =: I_n(f)$$

- $\{z_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. $z_j \neq z_k$, $j \neq k$. Donde algunos z_j pueden estar prefijados.
- $\lambda_j \in \mathbb{R}$, preferiblemente $\lambda_j > 0$. $j = 1, \ldots, n$. Fórmulas de cuadratura positivas. (Estabilidad y convergencia).
- Cotas de error.

Caso Real

$(-\infty < a < b < \infty)$

$$I_\mu(f) := \int_a^b f(x)d\mu(x) \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) =: I_n(f).$$

Pesos: $A_j \in \mathbb{R}$, preferiblemente $A_j > 0$. $j = 1, \ldots, n$. (Estabilidad y convergencia).

Nodos: $\{x_j\}_{j=1}^n \subset [a, b]$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$.

- $f(x) \approx P(x)$. Los polinomios son densos con la norma uniforme en $[a, b]$.
- Elegiremos los $2n$ parámetros:
  $I_\mu(P) = I_n(P)$, $\forall P \in \mathbb{P}_k$, k lo mayor posible (exacta en $\mathbb{P}_k$).

Caso Real

- Fijados los n nodos se garantiza exactitud en $\mathbb{P}_{n-1}$ con $A_j \in \mathbb{R}$.
- No existen fórmulas exactas en $\mathbb{P}_{2n}$.
- Fórmulas de cuadratura con máximo grado de precisión en $\mathbb{P}_{2n-1}$ de dimensión $2n$. Fórmulas Gaussianas, fórmulas positivas.

  $\mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{P}_n \subset \ldots \subset \mathbb{P}_{2n-4} \subset \mathbb{P}_{2n-3} \subset \mathbb{P}_{2n-2} \subset \mathbb{P}_{2n-1}$.
- Si una fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_m$ el número de pesos positivos es al menos $E[\frac{m}{2}] + 1$.

Caso Real

Teorema (Jacobi)

Una fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{n+k}$, $0 \leq k \leq n-1$, si y solo si,

- *Es exacta en $\mathbb{P}_{n-1}$*
- *El polinomio nodal $Q_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$ verifica:*

$$\int_a^b x^r Q_n(x) d\mu(x) = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, k. \tag{1}$$

- Si Q_n tiene coeficientes reales de (1), tiene $k+1$ ceros de multiplicidad impar en (a,b).
- $Q_n = P_n + a_{n-1}P_{n-1} + \ldots a_{k+1}P_{k+1}$.
  $\{P_l\}_{l\geq 1}$, polinomios ortogonales con respecto a μ.

Caso Real

$k = n-2$ Hay una familia uniparamétrica de fórmulas positivas. Planteamos fijar un nodo x_α, $(P_{n-1}(x_\alpha) \neq 0)$. Fórmulas de Gauss-Radau.

$k = n-3$ Hay una familia biparamétrica de fórmulas con al menos $n-1$ pesos positivos. Garantizamos $n-2$ nodos distintos entre sí. Planteamos fijar 2 nodos y pesos positivos. Fórmulas Gauss-Lobatto.

$k = n-4$ Hay una familia triparamétrica de fórmulas con al menos $n-1$ pesos positivos. Garantizamos $n-3$ nodos distintos entre sí, podemos intentar fijar 3 nodos. Fórmulas de Gauss-3.

Referencias recientes

- A. Bultheel, R. Cruz-Barroso, M. Van-Barel, On Gauss-type quadrature formulas with prescribed nodes anywhere on an interval of the real line, Calcolo 47 (1) (2010) 21-48.
- B. Beckermann, J. Bustamante, R. Martínez-Cruz, J.M. Quesada, Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa, Calcolo 51 (2) (2014) 319-328.
- R. Cruz-Barroso, C. Díaz Mendoza, F. Perdomo-Pío, A connection between Szegő-Lobatto and quasi Gauss-type quadrature formulas, Journal of Computational and Applied Mathematics 284 (2015) 133-143.

Enfoque "Clásico"

$$I_\mu(f) := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})d\mu(\theta) \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(z_k) =: I_n(f)$$

- Los polinomios de Laurent son densos en $\mathbb{T}$ con la norma uniforme.
- Elegiremos los $2n$ parámetros: $I_\mu(L) = I_n(L)$, $\forall L \in \Lambda_{p,q} = span\{z^{-p}..z^{q}\}, p, q \in \mathbb{N}$, con $p+q$ lo mayor posible (exacta en $\Lambda_{p,q}$).
- Si fijamos los n nodos, $\forall p, q \in \mathbb{N}$ con $p+q = n-1$, existen $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ de manera que la fórmula de cuadratura es exacta en $\Lambda_{p,q}$. Los pesos no son reales, en general.
- Los ordenes más habituales son los balanceados:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{2k} := \Lambda_{k,k}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{2k+1} := \Lambda_{k,k+1} \text{ ó } \tilde{\mathcal{L}}_{2k+1} := \Lambda_{k+1,k}$$

Enfoque "Clásico"

$$\tilde{\mathcal{L}}_{n-1} \subset \tilde{\mathcal{L}}_{n} \subset \ldots \subset \tilde{\mathcal{L}}_{2n-4} \subset \tilde{\mathcal{L}}_{2n-3} \subset \tilde{\mathcal{L}}_{2n-2} \subset \tilde{\mathcal{L}}_{2n-1}$$

- No existen fórmulas exactas ni en $\tilde{\mathcal{L}}_{2n}$ ni en $\tilde{\mathcal{L}}_{2n-1}$
- Fórmulas de cuadratura positivas de máximo grado de exactitud posible, $\tilde{\mathcal{L}}_{2n-2} = \Lambda_{n-1,n-1}$. Fórmulas de Szegő, familia uniparamétrica.
  - Fórmulas de Szegő-Radau: Fijamos un nodo, son únicas y exactas en $\tilde{\mathcal{L}}_{2n-2}$.
- Formulas de Szegő-Lobatto: Fijamos dos nodos, familia uniparamétrica, exactas en $\tilde{\mathcal{L}}_{2n-4} = \Lambda_{n-2,n-2}$.

Problemas

- No existen fórmulas de cuadratura exactas en un espacio de dimensión $2n$ con nodos en $\mathbb{T}$.
- Los pesos de las fórmulas de tipo interpolatorio no son en general reales.

Objetivos

Definir nuevos espacios encajados donde las fórmulas de cuadratura puedan tener las propiedades deseadas.

$$\mathcal{L}_{n-1} \subset \mathcal{L}_n \subset \ldots \subset \mathcal{L}_{2n-4} \subset \mathcal{L}_{2n-3} \subset \mathcal{L}_{2n-2} \subset \mathcal{L}_{2n-1}$$

- Obtener pesos reales y preferiblemente positivos.
- Si poseemos $2n$ parámetros libres, la fórmula de cuadratura debe ser exacta en un subespacio de dimensión $2n$. ($\mathcal{L}_{2n-1}$).
- ¿Existirán fórmulas exactas en $\mathcal{L}_{2n-3}$?

Inspiración

Teorema

Si una fórmula de cuadratura con pesos reales es exacta en $\Lambda_{p,q}$, también lo es en $\Lambda_{\max\{p,q\},\max\{p,q\}}$.

Teorema (O. Njåstad y J. Santos-León)

Las fórmulas de Cuadratura de Szegő con n puntos integran exactamente en $\Lambda_{n-1,n-1} \oplus span\{z^n + \frac{\xi}{z^n}\}$ para cierto $\xi \in \mathbb{T}$

Teorema (F. Peherstorfer)

Una fórmula de cuadratura $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j)$ tiene pesos positivos y es exacta en $\Lambda_{n-p-1,n-p-1}$, si y solo si, $z\tilde{\phi}_{n-1}(z) + \tau\tilde{\phi}^*_{n-1}(z)$ es el polinomio nodal, donde $\tau \in \mathbb{T}$ y $\tilde{\phi}_{n-1}$ es el polinomio de Szegő generado al modificar los últimos p parámetros de Verblunsky $\{\delta_j\}_{j=n-p}^{n-1}$ de manera que $|\delta_j| < 1$.

Consideramos la sucesión $\{\omega_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{T}$

$$\mathcal{L}_{2k} := \Lambda_{k,k}, \quad \mathcal{L}_{2k+1} := \mathcal{L}_{2k} \oplus span\{z^{k+1} + \tfrac{\omega_{k+1}}{z^{k+1}}\}, \quad k \geq 0$$

- $L \in \mathcal{L}_n \iff \overline{L} \in \mathcal{L}_n$ en $\mathbb{T}$.
- $\mathcal{L}_{2k}$ es un sistema de Tchebychev en $\mathbb{T}$.
- El problema de interpolación en $\mathcal{L}_{2k+1}$ tiene solución si y solo si $z_1 \cdots z_{2k+2} \neq \omega_{k+1}$.

Interpolación de Lagrange

$$L_n(z) = \begin{cases} \dfrac{B_n(z)}{(z-z_k)B_n'(z_k)} \left(\dfrac{z_k}{z}\right)^{d-1} & \text{if} \quad n = 2d-1, \\ \dfrac{B_n(z)}{(z-z_k)B_n'(z_k)} \dfrac{z-\frac{z_k\omega_d}{B_n(0)}}{z_k\left(1-\frac{\omega_d}{B_n(0)}\right)} \left(\dfrac{z_k}{z}\right)^{d} & \text{if} \quad n = 2d. \end{cases}$$

Teorema

Sean $\{z_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$, n *nodos distintos tales que* $B_n(0) \neq \omega_{\frac{n}{2}}$ *si* n *es par. Entonces existen pesos* $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ *únicos de manera que* $I_n(f)$ *es exacta en* $\mathcal{L}_{n-1}$.

Teorema (Interpolatoria)

$$\lambda_k = I_\mu(L_k),$$

Teorema

Sea $I_n(f)$ *una fórmula de cuadratura, exacta en* $\mathcal{L}_l$, $n-1 \leq l \leq 2n-1$. *Entonces sus pesos* $\{\lambda_k\}_{k=1}^l$ *son reales y al menos* $E[\frac{l}{2}]+1$ *son positivos.*

Teorema

Sea $I_n(f)$ *una fórmula de cuadratura exacta en* $\mathcal{L}_l$ *y* $S_n = \{L_1, \ldots, L_n\}$*, con* $L_k \in \mathcal{L}_{n-1}$ *el* k*-ésimo polinomio de Laurent de Lagrange asociados a los nodos de* $I_n(f)$*.*

- *Si* $n = 2d + 1$*,* S_n *es una base ortogonal de* $\mathcal{L}_{n-1}$ *si* $l = 2n - 2, 2n - 1$*.*
- *Si* $n = 2d$ *y* $B_n(0) \neq \omega_d$*,* S_n *es una base ortogonal de* $\mathcal{L}_{n-1}$*, si* $l = 2n - 1$ *y* $\omega_{2d} = \omega_d^2$*.*

Teorema (Jacobi)

La fórmula de cuadratura $I_n(f)$, con $B_n(0) \neq \omega_{\frac{n}{2}}$ si n es par. Es exacta en $\mathcal{L}_{n-1+s}$, $1 \leq s \leq n$, si y solo si

1. $I_n(f)$ *es exacta en* $\mathcal{L}_{n-1}$.
2. $I(B_n(z)P(z)z^{-l}) = 0,$
   $$\forall P \in \begin{cases} \mathbb{P}_{s-1} & si\ n+s\ \ es\ \ impar \\ span\{z, \ldots, z^{s-1}, z^s + \frac{\omega_l}{B_n(0)}\} & si\ n+s\ \ es\ \ par \end{cases}$$
   $l = E[\frac{n+s}{2}]$.

Teorema

Existe una fórmula de cuadratura positiva $I_n(f)$ *exacta en* $\mathcal{L}_{2n-1}$.

Teorema

Existe una única fórmula de cuadratura positiva $I_n(f)$ *con un nodo prefijado* $\alpha \in \mathbb{T}$ *exacta en* $\mathcal{L}_{2n-2}$

Teorema

Existe una única fórmula de cuadratura positiva $I_n(f)$ *con dos nodos fijos* $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ *exacta en* $\mathcal{L}_{2n-3}$ *si y solo si* ω_{n-1} *es la imagen de* δ_{n-1} *mediante cierta transformación.*

Teorema

Existe una única fórmula de cuadratura positiva $I_n(f)$ *con tres nodos fijos* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{T}$ *exacta en* $\mathcal{L}_{2n-4}$, *si y solo si* τ_{n-1} *es la imagen de* δ_{n-1} *mediante cierta transformación.*

$$B_n(z) = z\phi_{n-1}(z) - \tau\phi^*_{n-1}(z)$$
$$\phi_{n-1}(z) = z\phi_{n-2}(z) - \delta_{n-1}\phi^*_{n-1}(z)$$
$$F_n(z) := z\frac{\phi_{n-1}(z)}{\phi^*_{n-1}(z)}, \quad (F_n : \mathbb{T} \to \mathbb{T})$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ y definimos $a = F_{n-1}(\alpha) \in \mathbb{T}$ y $b = F_{n-1}(\beta) \in \mathbb{T}$.

$$\delta_{n-1} \rightsquigarrow \tilde{\delta}_{n-1}$$

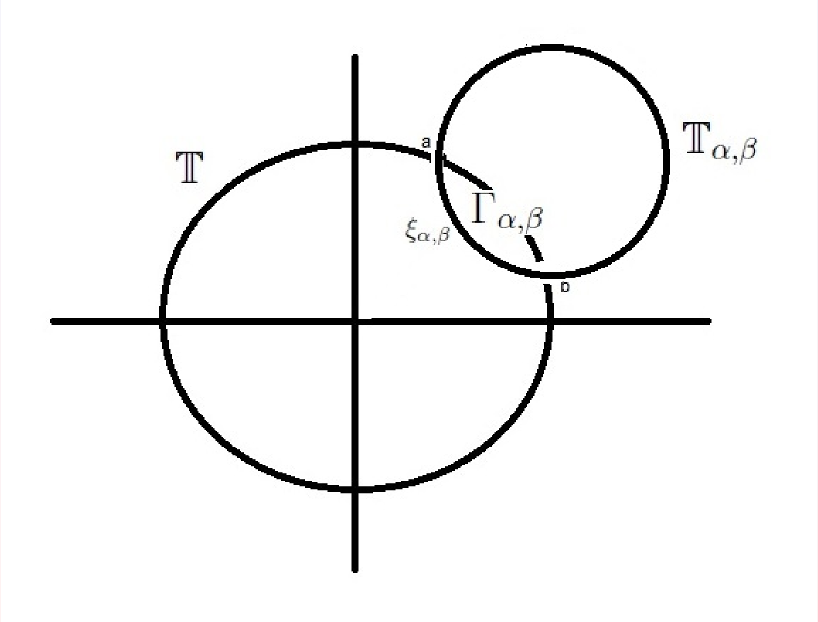
Imponemos $B_n(\alpha) = B_n(\beta) = 0$.

- Si $\overline{a}\alpha - \overline{b}\beta \neq 0$ Definimos:

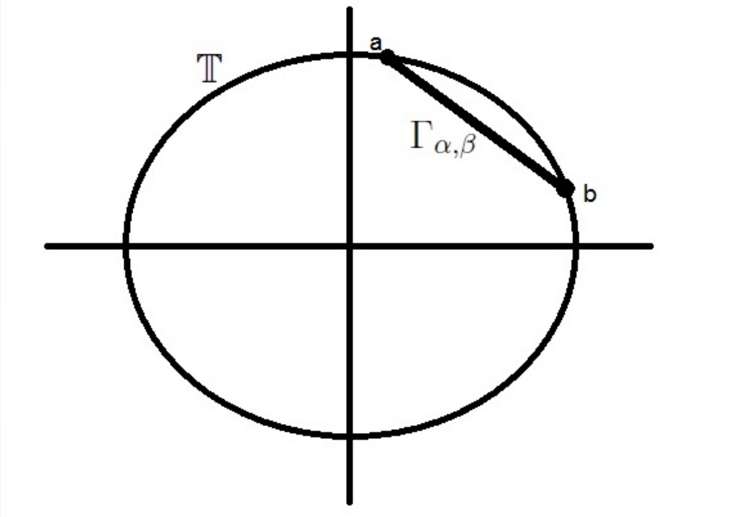
$$c_{\alpha,\beta} := \frac{\alpha - \beta}{\alpha\bar{a} - \beta\bar{\bar{b}}} \qquad \text{and} \qquad r_{\alpha,\beta} := \frac{\bar{a} - \bar{b}}{\alpha\bar{a} - \beta\bar{\bar{b}}},$$
$$\mathbb{T}_{\alpha,\beta} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - c_{\alpha,\beta}| = |r_{\alpha,\beta}|\}.$$

Elegiremos $\tilde{\delta}_{n-1}$ y τ_n

$$\tilde{\delta}_{n-1} \in \mathbb{T}_{\alpha,\beta} \cap \mathbb{D}, \quad \tilde{\delta}_{n-1} - c_{\alpha,\beta} = -\tau_n r_{\alpha,\beta}.$$


$\mathbb{T}$
a
$\mathbb{T}_{\alpha,\beta}$
$\Gamma_{\alpha,\beta}$
$\xi_{\alpha,\beta}$
b

- Si $\overline{a}\alpha - \overline{b}\beta = 0$, $\tilde{\delta}_{n-1}$ se encuentra en la cuerda que une a y b.



Construcción

Teorema

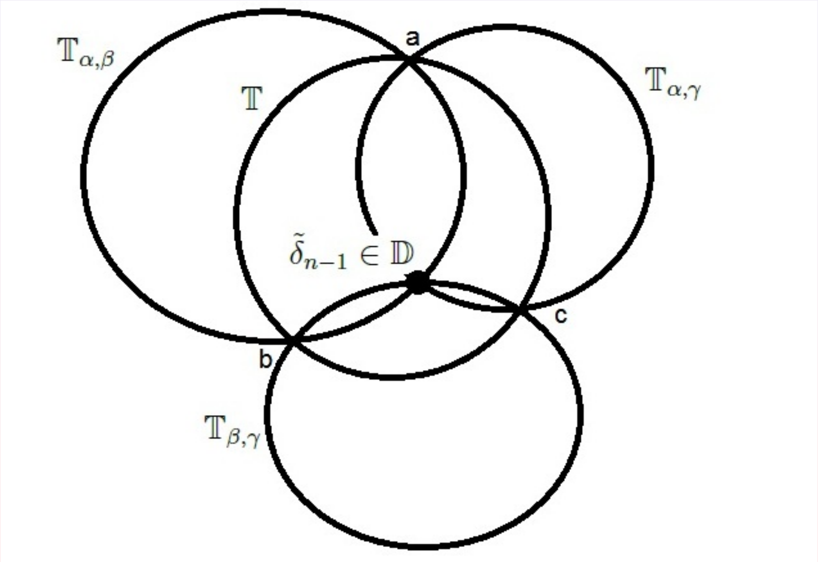
Es exacta en $\mathcal{L}_{2n-3}$, si y solo si, $\omega_{n-1} = -\frac{\delta_{n-1}-\tilde{\delta}_{n-1}}{\overline{\delta_{n-1}}-\overline{\tilde{\delta}_{n-1}}}$.

Teorema

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{T}$ *y* $a = F_{n-1}(\alpha)$, $b = F_{n-1}(\beta)$, $c = F_{n-1}(\gamma)$ *distintos, respectivamente. Existe una única fórmula de cuadratura* $I_n(f)$ *con nodos fijos* α, β, γ *exacta en* $L \in \mathcal{L}_{2n-4}$*, si y solo si,* $\left|\tilde{\delta}_{n-1}\right| < 1$*, donde:*

1. $\tilde{\delta}_{n-1} = \frac{c_{\alpha,\gamma} r_{\alpha,\beta} - c_{\alpha,\beta} r_{\alpha,\gamma}}{r_{\alpha,\beta} - r_{\alpha,\gamma}}$, *si* $\alpha\bar{\mathbf{a}} - \beta\bar{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}$ *y* $\alpha\bar{\mathbf{a}} - \gamma\bar{\mathbf{c}} \neq \mathbf{0}$.
   $\tau_n = -\frac{c_{\alpha,\beta} - c_{\alpha,\gamma}}{r_{\alpha,\beta} - r_{\alpha,\gamma}}$.
2. $\tilde{\delta}_{n-1} = c_{\alpha,\beta} + \tau_n r_{\alpha,\beta}$, *si* $\alpha\bar{\mathbf{a}} - \beta\bar{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}$ *y* $\alpha\bar{\mathbf{a}} - \gamma\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$.
   $\tau_n = -c\alpha$.
3. $\tilde{\delta}_{n-1} = c_{\alpha,\gamma} + \tau_n r_{\alpha,\gamma}$, *si* $\alpha\bar{\mathbf{a}} - \beta\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ *y* $\alpha\bar{\mathbf{a}} - \gamma\bar{\mathbf{c}} \neq \mathbf{0}$.
   $\tau_n = -b\alpha$.

Construcción

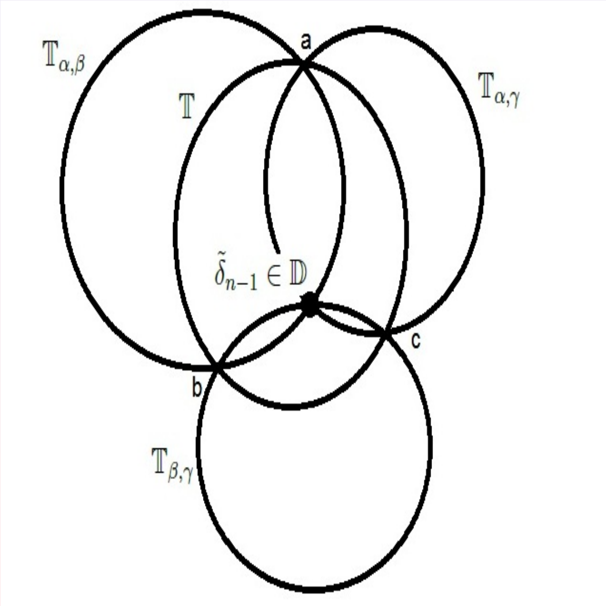


Caso especial

Si $|\tilde{\delta}_{n-1}| > 1$. El polinomio nodal es invariante. Garantizamos $n-2$ nodos de multiplicidad impar. La naturaleza de los n nodos puede ser:

- Los n distintos en $\mathbb{T}$, con a lo sumo un peso negativo.
- $n-1$ nodos distintos en $\mathbb{T}$.
- $n-2$ nodos distintos en $\mathbb{T}$ y 2 nodos complejos simétricos con respecto a $\mathbb{T}$.
- Sólo $n-2$ nodos distintos en $\mathbb{T}$.

$|\tilde{\delta}_{n-1}| > 1$



Cotas de error

$$E_n(f) := \min_{L \in \mathcal{L}_n} \|f - L\|_\infty$$

$$|R_n(f)| := |I_\mu(f) - I_n(f)| \leq \left(\mu_0 + \sum_{l=1}^{n} |\lambda_l|\right) E_k(f).$$

Si denotamos por $\{I_n^H(f)\}_{n \geq 0}$ las sucesiones de fórmulas de Szegő, Szegő-Radau, Szegő-Lobatto o Szegő con 3 nodos fijos por $H = S, SR, SL$ o $S3$, respectivamente:

Teorema

Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$*, entonces* $|R_n^H(f)| \leq 2\mu_0 E_{n^*}(f)$*, con* $n^* = 2n-1, 2n-2, 2n-3, 2n-4$ *para* $H = S, SR, SL, S3$*, respectivamente. Además,*

$$\lim_{n \to \infty} I_n^H(f) = I(f), \quad \textit{para toda} \quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \quad y \quad H = S, SR.$$

Consideremos $\mathfrak{L}(d,\alpha)$ el espacio de las funciones con d-ésima derivada continua y verificando condición de Lipschitz de orden α, $0 < \alpha < 1$.

Teorema

Sea $f \in \mathfrak{L}(d,\alpha)$. Entonces, existe un polinomio de Laurent $L_{2n} \in \mathcal{L}_{2n}$ tal que

$$|f(z) - L_{2n}(z)| \leq \frac{B}{(2n)^{d+\alpha}}, \quad \forall z \in \mathbb{T}, \quad \exists B > 0.$$

Corolario

Sea $f \in \mathfrak{L}(d,\alpha)$. Entonces, $\left|R_n^H(f)\right| \leq \frac{A}{(n^*)^{d+\alpha}}$, para algún $A > 0$, donde $n^* = n-1$ si $H = S, SR$, o $n^* = n-2$ si $H = SL, S3$.

Cotas de error

Teorema

Sea f analítica en un entorno de $\mathbb{T}$, y sea $\mathcal{A}(0,R) := \{z \in \mathbb{C} : \; R^{-1} \leq |z| \leq R\}$ el mayor anillo donde es analítica. Entonces,

$$|R_n^H(f)| \leq \frac{C}{R^{n^*}},$$

donde $n^* = n-1$ si $H = S, SR$, o $n^* = n-2$ si $H = SL, S3$. Es más

$$\lim_{n\to\infty} |R_n^H(f)|^{\frac{1}{n}} \leq R^{-1}, \quad para \quad H = S, SR.$$

Si f es entera

$$\lim_{n\to\infty} |R_n^H(f)|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Otros resultados obtenidos

- Fórmulas de cuadratura trigonométricas positivas con nodos prefijados (quasi-Gauss, quasi-Gauss-Radau, quasi-Gauss-Lobatto.
- Fórmulas de cuadratura positivas con hasta $2d+1$ puntos prefijados con $d>1$. Relación con transformaciones de Moebius con el fin de trasladar el centro radical $\frac{d}{2}$ pasos atrás.
- Fórmulas de cuadraturas ortogonales.
  Sucesión de polinomios de Laurent ortogonales $\{L_n\}_{n\geq 1}$ asociado a $\{\mathcal{L}_n\}_{n\geq 1}$.
  - L_n tiene todos sus ceros simples y en $\mathbb{T}$.
  - Relación de recurrencia (pentadiagonal)
  - Identidad de Christoffel-Darboux.
  - Aplicaciones a la aproximación de Padé bipuntual a la transformada de Herglotz-Riesz.
- Fórmulas de cuadratura exactas en $\mathcal{L}_l$ con $n\leq l\leq 2n-3$ no necesariamente positivas (casos especiales $|\delta_k|>1$).