Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones Universidad Zaragoza

Departamento de Matemáticas Universidad Zaragoza

Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

Seminario Rubio de Francia

Conferencia

por

Eugenia Saorín Gómez

(basado en trabajos en colaboración con M. A. Hernández Cifre, y C. Richter)

Universidad de Bremen

Título:

Cuerpos paralelos interiores y el cociente isoperimétrico

Resumen: La diferencia de Minkowski de cuerpos convexos (subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$) suele considerarse como operación complementaria (en relación a la diferencia) de la suma de Minkowski o suma vectorial (de cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$).

Para cuerpos convexos $K, E \subset \mathbb{R}^n$, la diferencia de Minkowski de K y E se define como

$$K \sim E := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x + E \subseteq K\},$$

es decir, el conjunto más grande al que podemos sumar E, de tal forma que la suma esté contenida en K. Para un cuerpo convexo K, el cuerpo convexo E es un sumando de K si existe otro cuerpo convexo L, tal que $E + L = K$. Es importante observar, que, por definición, $(K \sim E) + E \subset K$, y que este contenido puede ser estricto. Dados $K, E \subset \mathbb{R}^n$ cuerpos convexos, el inradio de K relativo a E se define como

$$\mathrm{r}(K; E) = \sup\{r : \exists\, x \in \mathbb{R}^n \text{ with } x + r\,E \subseteq K\}.$$

Entonces, para $0 \leq \lambda \leq \mathrm{r}(K; E)$, el cuerpo paralelo interior de K (relativo a E) a distancia λ es la diferencia de Minkowski de K y λE, esto es:

$$K \sim \lambda E = \{x \in \mathbb{R}^n : x + \lambda E \subseteq K\}.$$

El sistema completo de paralelos de un cuerpo convexo K relativo al cuerpo convexo E está formado por los cuerpos paralelos interiores y los cuerpos paralelos exteriores, indexando todos los cuerpos bajo el mismo parámetro λ, como sigue:

$$K_\lambda := \begin{cases} K \sim |\lambda| E & \text{for } -\mathrm{r}(K; E) \leq \lambda \leq 0, \\ K + \lambda E & \text{for } 0 \leq \lambda < \infty. \end{cases}$$

Claramente $K = K_0$, mientras que para $\lambda = -\mathrm{r}(K;E)$ el cuerpo $K_{-\mathrm{r}(K;E)}$ es un cuerpo convexo degenerado, es decir, sin puntos interiores, conocido como núcleo de K relativo a E. El sistema completo de cuerpos paralelos de K, relativo a E, es cóncavo con respecto a la inclusión y la suma de Minkowski.

Para cuerpos convexos $K, E \subset \mathbb{R}^n$, con interior no vacío, el *cociente isoperimétrico* se define como la razón

$$\mathrm{I}(K;E) = \frac{S(K;E)^n}{\mathrm{vol}\,(K)^{n-1}},$$

donde $\mathrm{vol}\,(K)$ denota el volumen de K, y $S(K;E)$ la superficie de K (con respecto a E). Cuando E es la bola euclídea esta última coincide con la superficie clásica y la razón anterior, con el cociente isoperimétrico clásico.

El cociente isoperimétrico, más en concreto, el hecho de que sea monótono al considerar la familia de paralelos de un cuerpo convexo, ha sido objeto de varios estudios recientemente, por ejemplo en conexión con el modelo de abrasión Eikonal. En esta charla analizaremos varios aspectos de la familia de cuerpos paralelos interiores de un cuerpo convexo, en concreto, en el marco de la Teoría de Brunn-Minkowski. Muchos de ellos utilizan de forma esencial la concavidad del sistema completo de cuerpos paralelos. El objetivo primordial será probar que el cociente isoperimétrico es decreciente en el parámetro de definición de cuerpos paralelos, y establecer una caracterización de los cuerpos convexos para los cuales el cociente resulta ser constante en algún intervalo dentro de su dominio.

Fecha: Jueves, 17 de febrero de 2022.
Hora: 12:00 horas.
Webinar: `https://zoom.us/j/92291187808`
Web: `http://anamat.unizar.es/seminario.html`
`http://eventos.unizar.es/52859/detail/seminario-rubio-de-francia.html`