Aproximación asintótica y funciones especiales

Jornadas IUMA

Zaragoza, 20 de febrero de 2025

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

INAMAT^2
Institute for Advanced Materials and Mathematics

Universidad Zaragoza

Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones Universidad Zaragoza

Contenidos

Grupo de investigación

Miembros	Centro
Chelo Ferreira	Dpto. de Matemática Aplicada, IUMA
Ester Pérez Sinusía	
Blanca Bujanda	Dpto. Estadística, Informática y Matemáticas, INAMAT
José Luis López	
Pedro Pagola	
Pablo Palacios	

UPNA

Fac. Ciencias (UZ)

EINA (UZ)

Contenidos

Nuestro interés

- Aproximar soluciones de problemas de interés en matemáticas, física, ingeniería, y ciencia en general.
- En muchas ocasiones, estos problemas se presentan en la forma de integrales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones en diferencias.
- Muchas veces las soluciones resultan ser funciones especiales.

¿Funciones especiales?

¿Qué son las funciones especiales?

NIST Digital Library of Mathematical Functions

Nuestro interés

¿Qué hacemos?

- Diseñar técnicas de aproximación en forma de series convergentes o divergentes.
- Aproximaciones en términos de funciones elementales o lo más sencillas posibles.

¿Series divergentes?

¿Qué es la asintótica?

¿Qué es la asintótica?

Rama de las matemáticas que estudia el comportamiento de una función cuando uno (o varios) de sus parámetros toma(n) un valor límite.

Desarrollos convergentes vs desarrollos asintóticos

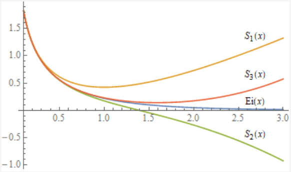
Integral exponencial

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt, \quad x > 0$$

Desarrollo convergente

$$\mathrm{Ei}\,(x) = \gamma + \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,n}, \quad x > 0$$

- Convergente para $x > 0$.



- Serie de convergencia lenta.

Desarrollos convergentes vs desarrollos asintóticos

Desarrollo asintótico

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt, \quad x > 0$$

Aplicando integración por partes repetidamente:

$$\mathrm{Ei}(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \ldots + (-1)^{N-1}\frac{(N-1)!}{x^N}\right) + (-1)^N N! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{N+1}}\,dt$$

Desarrollos convergentes vs desarrollos asintóticos

Integral exponencial

$$\mathrm{Ei}(x) = e^{-x} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^n} + (-1)^N N! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{N+1}}\, dt$$

- Resto:

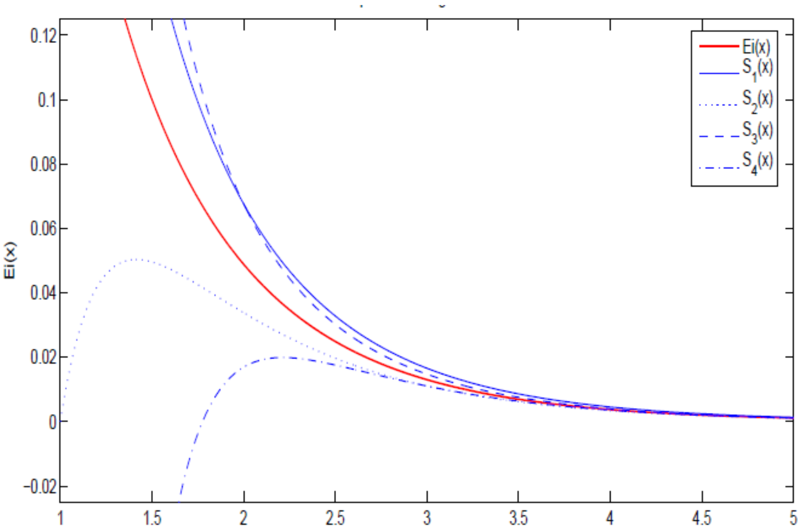
$$R_N(x) = (-1)^N N! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{N+1}}\, dt = \mathcal{O}(x^{-N-1})$$

- La serie es un desarrollo asintótico de $\mathrm{Ei}(x)$:

$$\mathrm{Ei}(x) \sim e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^n}$$

¡Es divergente para cualquier valor de $x > 0$!

Desarrollos convergentes vs desarrollos asintóticos



Desarrollos convergentes vs desarrollos asintóticos

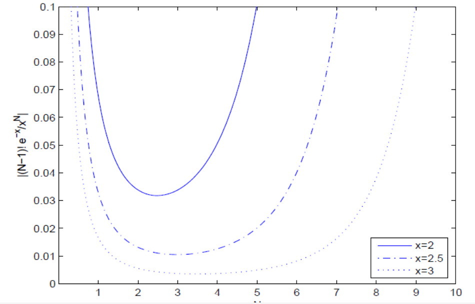
Integral exponencial

- Los desarrollos asintóticos pueden ser muy precisos:

$$\mathrm{Ei}(10) \approx S_4(10)$$

con un error menor que 0.003%.

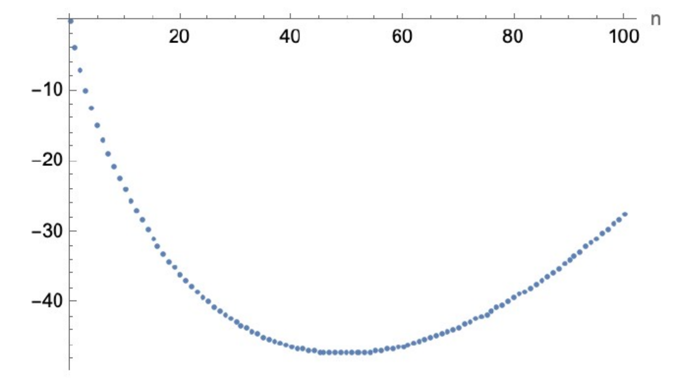
- Comportamiento del término general como función de N y x fijo



Desarrollos convergentes vs desarrollos asintóticos

La cota del error

Logaritmo de la cota del error



Valor óptimo de truncamiento está en $N = 47$

Contenidos

Líneas de investigación

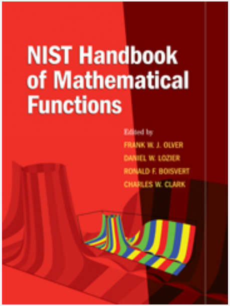
Líneas de investigación

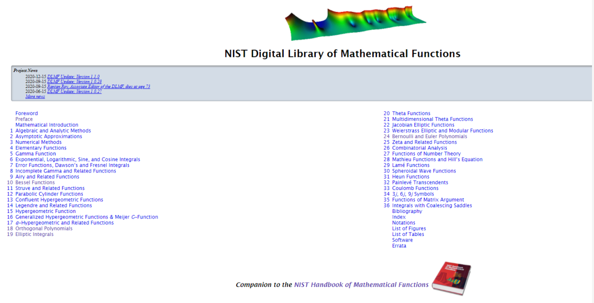
- Nuevas técnicas para obtener aproximaciones convergentes o divergentes.
  - Para integrales.
  - Para ecuaciones diferenciales.
  - Para ecuaciones en derivadas parciales.
  - Para ecuaciones en diferencias.

Líneas de investigación

Líneas de investigación

- Estudio del comportamiento asintótico de funciones especiales.



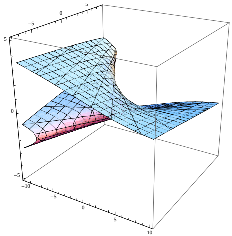


NIST Digital Library of Mathematical Functions

Ejemplo 1. Ecuaciones diferenciales

$$U'''' - zU'' - iyU' + xU = 0, \quad U(x,y,z) \sim \frac{e^{f(x,y,z)}}{z^{3/8}}, \quad z \to \infty$$

- $U(x,y,z)$ es una *catastrophe integral*, $f(x,y,z)$ función elemental.
- Teoría de las catástrofes: aplicaciones en óptica, conexión entre óptica de rayos y la óptica de ondas, acústica, reflexión de pulsos de ultrasonido y guías de ondas acústicas, mecánica cuántica, conexiones semiclásicas entre órbitas clásicas y funciones de onda cuánticas.

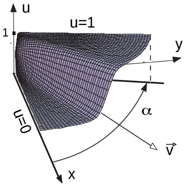


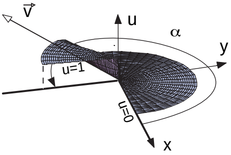
Ejemplo 2. Ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} -\varepsilon \triangle U + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} U = 0 \quad \text{en} \;\; \Omega, \\ U(r,0) = 0, \quad U(r,\alpha) = 1 \quad r > 0, \end{cases}$$

$$U(r,\theta) \sim \operatorname{erfc}\sqrt{r(1-\cos(\alpha-\theta))/(2\varepsilon)}, \quad \varepsilon \to 0$$

- $U(r,\theta)$ solución problema de contorno con perturbación singular.
- $\varepsilon \to 0$, coef. $\triangle U$ muy pequeño: U es 0 cerca de $\theta = 0$, 1 cerca de $\theta = \alpha$ y experimenta transición continua y rápida entre una y otra.
- Aplicaciones en problemas de fluidos, elasticidad.

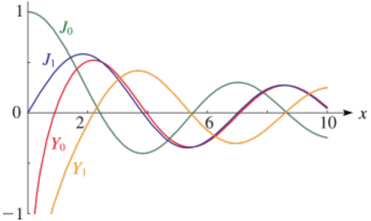




Ejemplo 3. Integrales

$$J_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \sin(zt)dt$$
$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{\pi}{4}\right), \quad z \to \infty.$$

- $J_\nu(z)$ es una función de Bessel, z es la variable radial.
- Aplicaciones en problemas de mecánica cuántica con potenciales con simetría cilíndrica.



Otros ejemplos

- Fórmula de Stirling

$$\log n! \sim (n + 1/2)\log n - n + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{n^s}, \quad n \to \infty$$

- Números armónicos

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \log n, \quad n \to \infty$$