

Análisis Geométrico Convexo

David Alonso Gutiérrez
alonsod@unizar.es

Universidad de Zaragoza-IUMA

13 de febrero de 2025



Instituto Universitario de Investigación
**de Matemáticas
y Aplicaciones**
UniversidadZaragoza

Esta línea de investigación se enmarca dentro de los siguientes proyectos:

- Grupo de investigación E48_23R Análisis y Física matemática. Gobierno de Aragón. 01/01/2023-31/12/2025. IP: Luis Fernando Velázquez Campoy.
- PID2022-137294NB-I00: Métodos Analíticos y Geométricos en Teoría de Operadores. Agencia Estatal de Investigación. 01/09/2023-31/08/2026. IP's: Pedro José Miana Sanz y Eva Antonia Gallardo Gutiérrez.

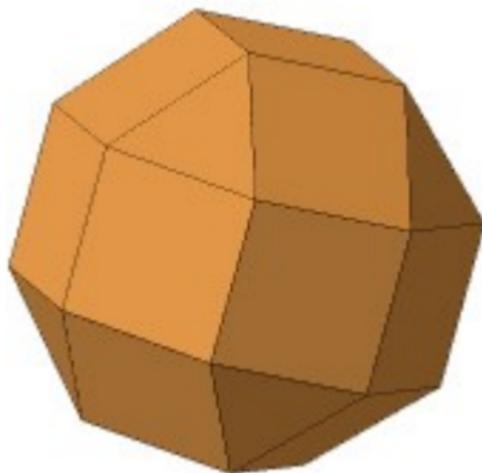
Cuerpos convexos

- Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es convexo si dados $x, y \in K$, el segmento que los une

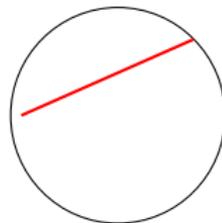
$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$$

está contenido en K .

- K es un cuerpo convexo si es convexo, compacto y tiene interior no vacío.

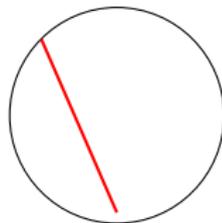


- $B_2^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$



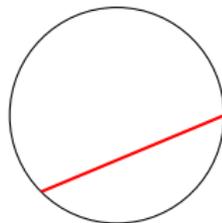
Cuerpos convexos

- $B_2^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$



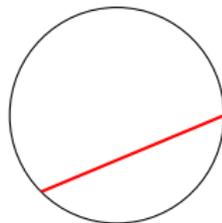
Cuerpos convexos

- $B_2^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

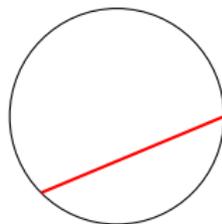


Cuerpos convexos

- $B_2^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$

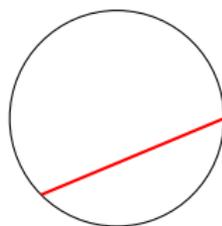


- $B_2^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$

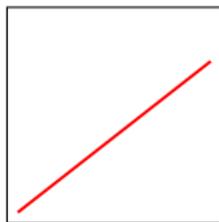


Cuerpos convexos

- $B_2^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$

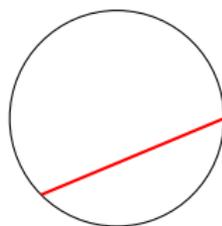


- $B_\infty^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in [-1, 1]\}$

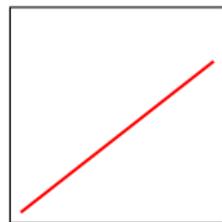


Cuerpos convexos

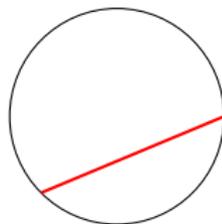
- $B_2^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$



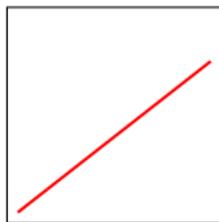
- $B_\infty^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in [-1, 1]\}$



- $B_2^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$



- $B_\infty^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [-1, 1] \forall i\}$



- Dada una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n , su bola unidad cerrada

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

es un cuerpo convexo simétrico.

- Dada una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n , su bola unidad cerrada

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

es un cuerpo convexo simétrico.

- Recíprocamente, dado un cuerpo convexo simétrico $K \subseteq \mathbb{R}^n$, es la bola unidad cerrada de la norma en \mathbb{R}^n dada por el funcional de Minkowski:

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}.$$

- Dada una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n , su bola unidad cerrada

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

es un cuerpo convexo simétrico.

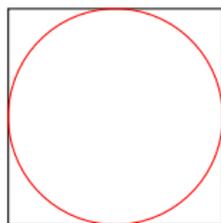
- Recíprocamente, dado un cuerpo convexo simétrico $K \subseteq \mathbb{R}^n$, es la bola unidad cerrada de la norma en \mathbb{R}^n dada por el funcional de Minkowski:

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}.$$

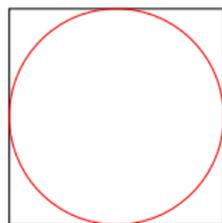
- Relación entre el estudio de espacios normados y el estudio de cuerpos convexos.

- Estudiamos las propiedades geométricas (volumen, anchura, superficie, volúmenes de proyecciones, volúmenes de secciones, volúmenes de proyecciones,...) de los cuerpos convexos de dimensión n y su dependencia de la dimensión n cuando n tiende a infinito.

- Estudiamos las propiedades geométricas (volumen, anchura, superficie, volúmenes de proyecciones, volúmenes de secciones, volúmenes de proyecciones,...) de los cuerpos convexos de dimensión n y su dependencia de la dimensión n cuando n tiende a infinito.

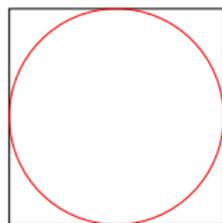


- Estudiamos las propiedades geométricas (volumen, anchura, superficie, volúmenes de proyecciones, volúmenes de secciones, volúmenes de proyecciones,...) de los cuerpos convexos de dimensión n y su dependencia de la dimensión n cuando n tiende a infinito.



$$|B_{\infty}^2| = 4, |B_{\infty}^3| = 8, \dots, |B_{\infty}^n| = 2^n \rightarrow \infty$$

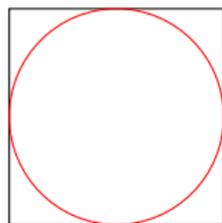
- Estudiamos las propiedades geométricas (volumen, anchura, superficie, volúmenes de proyecciones, volúmenes de secciones, volúmenes de proyecciones,...) de los cuerpos convexos de dimensión n y su dependencia de la dimensión n cuando n tiende a infinito.



$$|B_{\infty}^2| = 4, |B_{\infty}^3| = 8, \dots, |B_{\infty}^n| = 2^n \rightarrow \infty$$

$$|B_2^2| = \pi, |B_2^3| = \frac{4}{3}\pi, \dots, |B_2^n| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \rightarrow 0$$

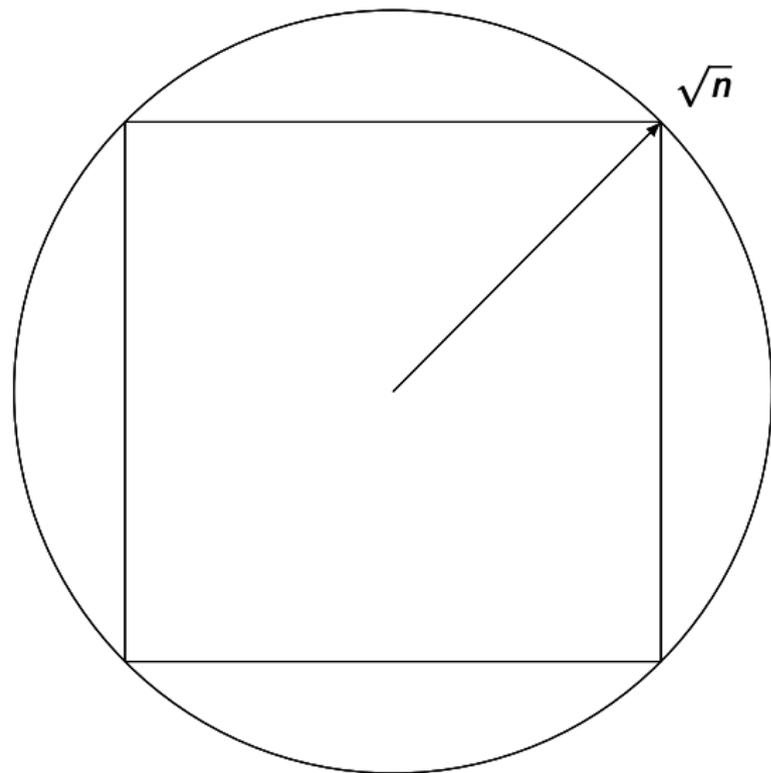
- Estudiamos las propiedades geométricas (volumen, anchura, superficie, volúmenes de proyecciones, volúmenes de secciones, volúmenes de proyecciones,...) de los cuerpos convexos de dimensión n y su dependencia de la dimensión n cuando n tiende a infinito.

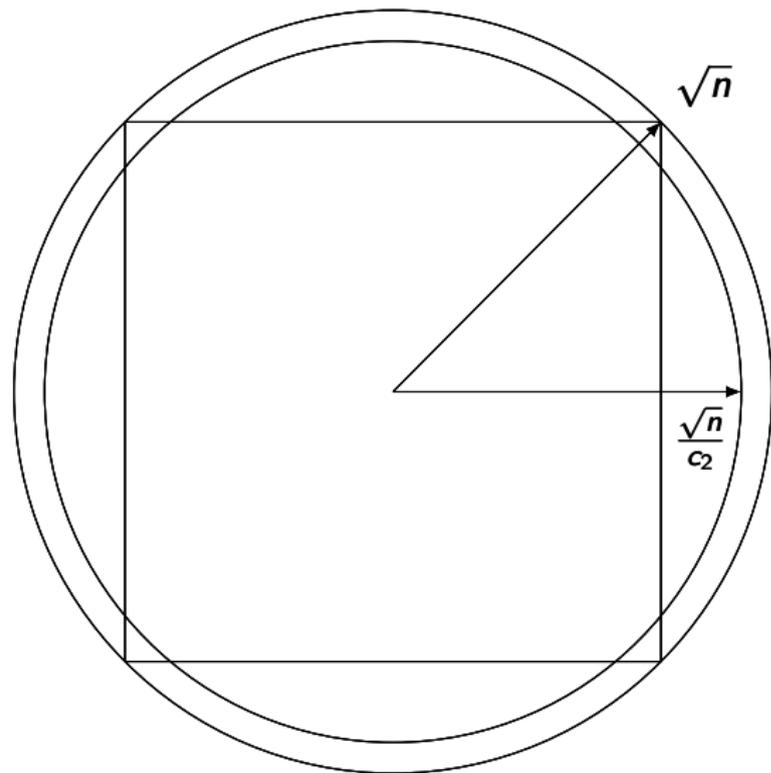


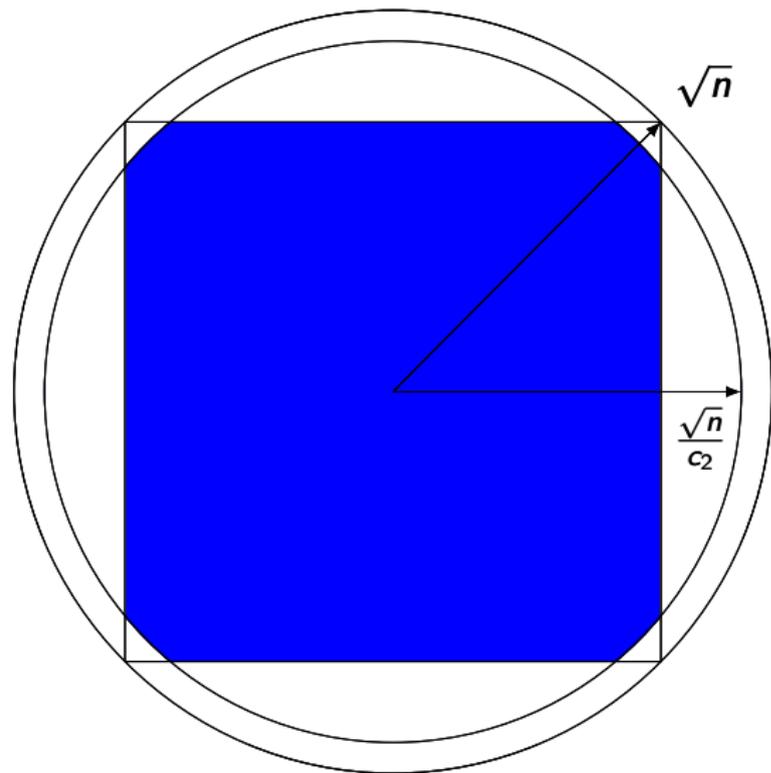
$$|B_{\infty}^2| = 4, |B_{\infty}^3| = 8, \dots, |B_{\infty}^n| = 2^n \rightarrow \infty$$

$$|B_2^2| = \pi, |B_2^3| = \frac{4}{3}\pi, \dots, |B_2^n| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \rightarrow 0$$

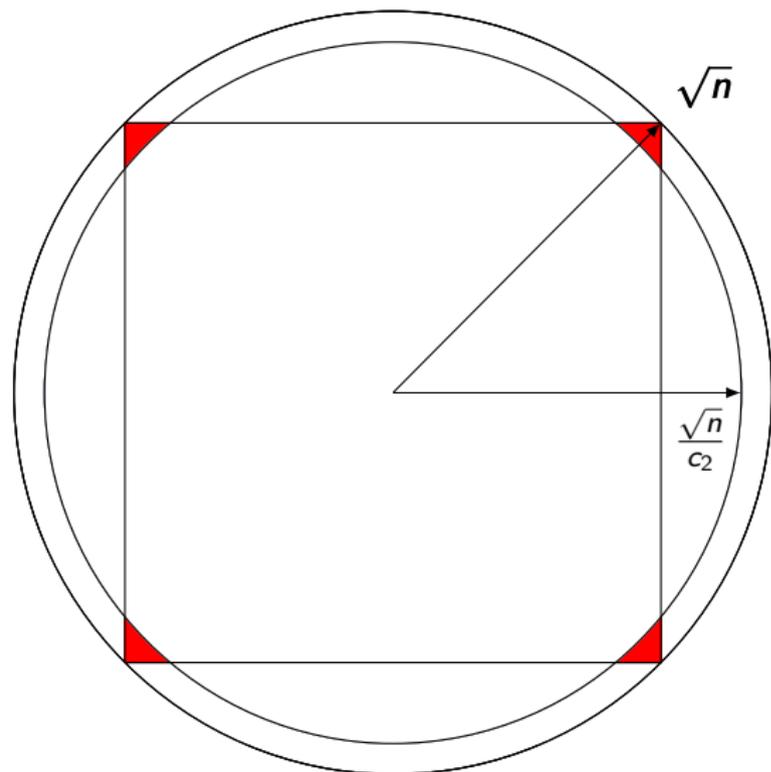
$$|B_{\infty}^n|^{\frac{1}{n}} = 2 \quad \frac{c_1}{\sqrt{n}} \leq |B_2^n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c_2}{\sqrt{n}}$$







$$|B_{\infty}^n \cap \frac{\sqrt{n}}{c_2} B_2^n| \leq |\frac{\sqrt{n}}{c_2} B_2^n| \leq 1$$



$$|B_\infty^n \cap \frac{\sqrt{n}}{c_2} B_2^n| \leq |\frac{\sqrt{n}}{c_2} B_2^n| \leq 1$$

$$|B_\infty^n \setminus \frac{\sqrt{n}}{c_2} B_2^n| \geq 2^n - 1$$

$$= 2^n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = |B_\infty^n| \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Análisis Geométrico Convexo

- La mayor parte del volumen de un cubo n -dimensional se concentra en las esquinas.

Análisis Geométrico Convexo

- La mayor parte del volumen de un cubo n -dimensional se concentra en las esquinas.
- Si cogemos un punto aleatorio en un cubo n -dimensional lo más probable es que esté cerca de las esquinas.

Análisis Geométrico Convexo

- La mayor parte del volumen de un cubo n -dimensional se concentra en las esquinas.
- Si cogemos un punto aleatorio en un cubo n -dimensional lo más probable es que esté cerca de las esquinas.
- Y en otro cuerpo convexo, ¿Cómo se distribuye el volumen?

Análisis Geométrico Convexo

- La mayor parte del volumen de un cubo n -dimensional se concentra en las esquinas.
- Si cogemos un punto aleatorio en un cubo n -dimensional lo más probable es que esté cerca de las esquinas.
- Y en otro cuerpo convexo, ¿Cómo se distribuye el volumen?
- Si cogemos un punto aleatorio en un cuerpo convexo K , ¿Cuál es la probabilidad de que esté en algún sitio?

Análisis Geométrico Convexo

- La mayor parte del volumen de un cubo n -dimensional se concentra en las esquinas.
- Si cogemos un punto aleatorio en un cubo n -dimensional lo más probable es que esté cerca de las esquinas.
- Y en otro cuerpo convexo, ¿Cómo se distribuye el volumen?
- Si cogemos un punto aleatorio en un cuerpo convexo K , ¿Cuál es la probabilidad de que esté en algún sitio?

Problema

Dado un vector aleatorio X uniformemente distribuido en un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, estudiar las propiedades de la distribución de X y su dependencia de K y de n .

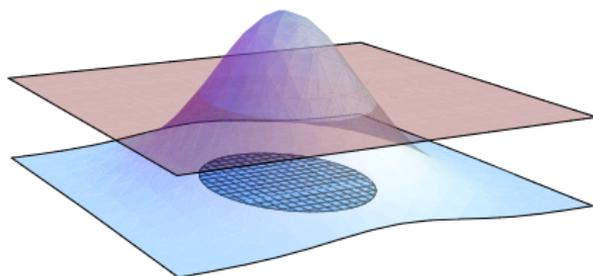
Funciones log-cóncavas

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ es log-cóncava si

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} f(y)^\lambda \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1]$$

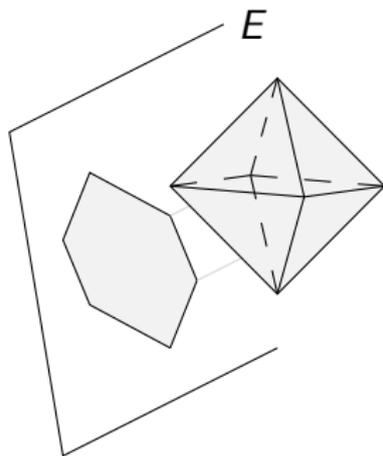
Equivalentemente, si

$$f(x) = e^{-V(x)}, \quad V : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty] \text{ convexa.}$$



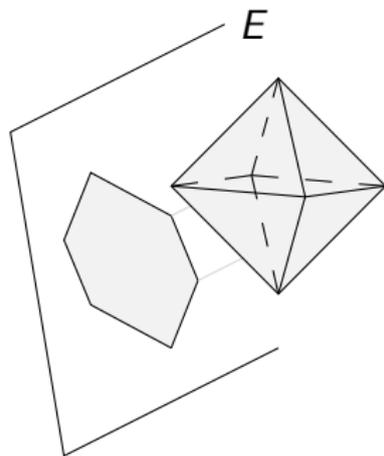
Funciones log-cóncavas

Cuando se proyecta un cuerpo convexo sobre un subespacio vectorial E se obtiene un cuerpo convexo en E



Funciones log-cóncavas

Cuando se proyecta un cuerpo convexo sobre un subespacio vectorial E se obtiene un cuerpo convexo en E



Cuando se proyecta la probabilidad uniforme sobre un cuerpo convexo sobre un subespacio E se obtiene una probabilidad con una densidad log-cóncava

Cuerpos convexos y funciones log-cóncavas

Los cuerpos convexos se encuentran “contenidos” en las funciones log-cóncavas:

- $K \rightarrow \chi_K$
- $K \rightarrow e^{-\|\cdot\|_K}$.

Cuerpos convexos y funciones log-cóncavas

Los cuerpos convexos se encuentran “contenidos” en las funciones log-cóncavas:

- $K \rightarrow \chi_K$
- $K \rightarrow e^{-\|\cdot\|_K}$.

Problema

Extender conceptos y desigualdades geométricas al contexto más general de las funciones log-cóncavas y utilizar dichas desigualdades para obtener desigualdades geométricas de cuerpos convexos.

Cuerpos convexos y funciones log-cóncavas

Los cuerpos convexos se encuentran “contenidos” en las funciones log-cóncavas:

- $K \rightarrow \chi_K$
- $K \rightarrow e^{-\|\cdot\|_K}$.

Problema

Extender conceptos y desigualdades geométricas al contexto más general de las funciones log-cóncavas y utilizar dichas desigualdades para obtener desigualdades geométricas de cuerpos convexos.

Problema

Obtener desigualdades entre diferentes parámetros geométricos de cuerpos convexos en dimensión n , estudiando el carácter asintótico de las constantes cuando $n \rightarrow \infty$, así como las mejores constantes posibles en dimensión n .

**DESIGUALDADES
DE TIPO
LOOMIS-WHITNEY**

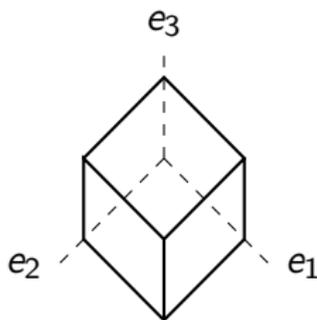
Desigualdad de Loomis-Whitney

Desigualdad de Loomis-Whitney (1949)

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base **ortonormal** de \mathbb{R}^n .
Entonces

$$|K| \leq \prod_{i=1}^n |P_{e_i^\perp} K|^{\frac{1}{n-1}}$$

con igualdad si y solo si K es un paralelepípedo con caras ortogonales a los vectores e_i .



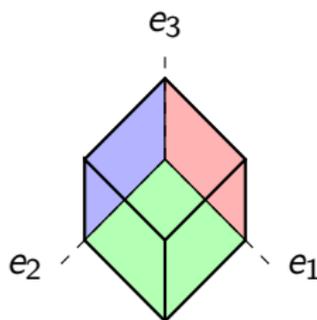
Desigualdad de Loomis-Whitney

Desigualdad de Loomis-Whitney (1949)

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base **ortonormal** de \mathbb{R}^n .
Entonces

$$|K| \leq \prod_{i=1}^n |P_{e_i^\perp} K|^{\frac{1}{n-1}}$$

con igualdad si y solo si K es un paralelepípedo con caras ortogonales a los vectores e_i .

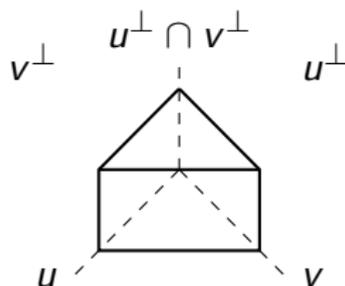


Desigualdades de Loomis-Whitney locales

Teorema (Giannopoulos, Hartzoulaki, Paouris, 2002)

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $u, v \in S^{n-1}$ con $\langle u, v \rangle = 0$. Entonces

$$|P_{u^\perp \cap v^\perp} K| |K| \leq \frac{2(n-1)}{n} |P_{u^\perp} K| |P_{v^\perp} K|$$

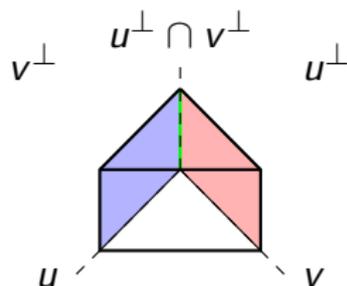


Desigualdades de Loomis-Whitney locales

Teorema (Giannopoulos, Hartzoulaki, Paouris, 2002)

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $u, v \in S^{n-1}$ con $\langle u, v \rangle = 0$. Entonces

$$|P_{u^\perp \cap v^\perp} K| |K| \leq \frac{2(n-1)}{n} |P_{u^\perp} K| |P_{v^\perp} K|$$

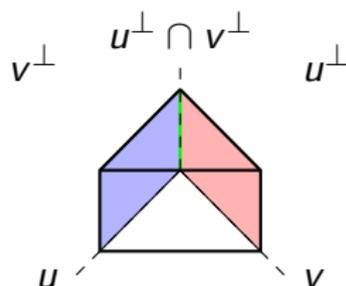


Desigualdades de Loomis-Whitney locales

Teorema (Brazitikos, Giannopoulos, Liakopoulos, 2018)

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $u, v \in S^{n-1}$. Entonces

$$|P_{u^\perp \cap v^\perp} K| |K| \leq \frac{2(n-1)}{n\sqrt{1 - \langle u, v \rangle^2}} |P_{u^\perp} K| |P_{v^\perp} K|.$$



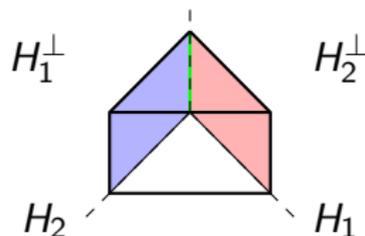
Desigualdades de Loomis-Whitney locales

Teorema (A., Artstein-Avidan, González, Jiménez, Villa, 2019)

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $H_1^\perp \in G_{n,i}$, $H_2^\perp \in G_{n,j}$ con $H_1 \subseteq H_2^\perp$ y $k = i + j - n$. Entonces, si $H = \text{span}\{H_1, H_2\}$

$$|P_{H^\perp} K| |K| \leq \frac{\binom{i}{k} \binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} |P_{H_1^\perp} K| |P_{H_2^\perp} K|.$$

$$H^\perp = \text{span}\{H_1, H_2\}^\perp = H_1^\perp \cap H_2^\perp$$



**VOLÚMENES DE
SECCIONES DEL CUBO
 n -DIMENSIONAL**

Secciones el cubo

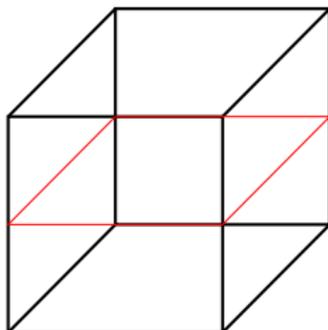
Sea $K = B_\infty^n$ y $H \in G_{n,k}$ un subespacio k -dimensional

$$??? \leq |B_\infty^n \cap H| \leq ???$$

Teorema (Vaaler, 1979)

Sea $H \in G_{n,k}$ un subespacio k -dimensional. Entonces

$$|B_\infty^k| \leq |B_\infty^n \cap H|$$

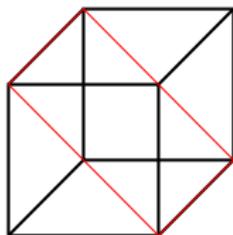


Secciones el cubo

Teorema (Ball, 1989)

Sea $H \in G_{n,k}$ un subespacio k -dimensional. Entonces

$$|B_{\infty}^n \cap H| \leq 2^{\frac{n-k}{2}} |B_{\infty}^k|.$$



Teorema (Ball, 1989)

Sea $H \in G_{n,k}$ un subespacio k -dimensional. Entonces

$$|B_{\infty}^n \cap H| \leq \sqrt{\frac{n}{k}} |B_{\infty}^k|.$$

