Sobre teoría de la medida geométrica y teoría de la infomación

un viaje de la informática a la matemática pura

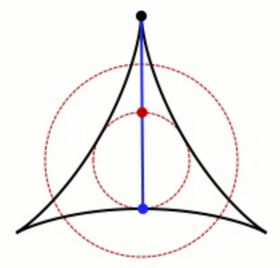
Elvira Mayordomo

Universidad de Zaragoza, Iowa State University

20 de febrero 2025

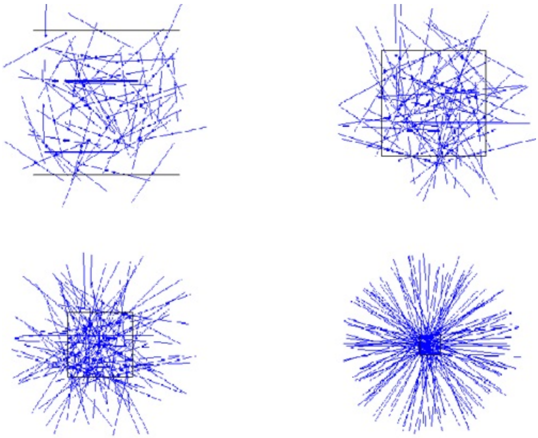
Un reto: la conjetura de Kakeya

Un conjunto de *Besicovitch* en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto E que contiene un intervalo unidad en cada dirección



Un reto: la conjetura de Kakeya

Un conjunto de *Besicovitch* in $\mathbb{R}^n$ es un conjunto E que contiene un intervalo unidad en cada dirección

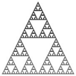


Un reto: la conjetura de Kakeya

- ¿Puede haber conjuntos de Besicovitch realmente pequeños?
- Besicovitch ya vio que existían algunos de medida 0 ... pero exsiten conjuntos de medida 0 realmente grandes

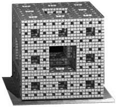
Conjetura de Kakeya: Todos los conjuntos de Besicovitch en $\mathbb{R}^n$ tienen dimensión de Hausdorff n.

Dimensión de Hausdorff



El triángulo de Sierpiński tiene dimensión $\log 3/\log 2 \approx 1{,}585$

La curva de Koch curve tiene dimensión $\log 4/\log 3 \approx 1{,}262$



La esponja de Menger tiene dimensión $\log 20/\log 3 \approx 2{,}727$

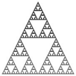
Idea de la definición de dimensión de Hausdorff (Teoría de la medida geometrica)

- Definir una familia de medidas H^s (decreciente en s)
- Por ejemplo una extensión de
  $H^1 =$ longitud, $H^2 =$ superficie, $H^3 =$ volumen
- Para un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, buscar la H^s adecuada

$$0 < H^s(E) < \infty$$

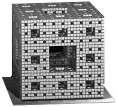
- Esta s adecuada es la dimensión

Dimensiones



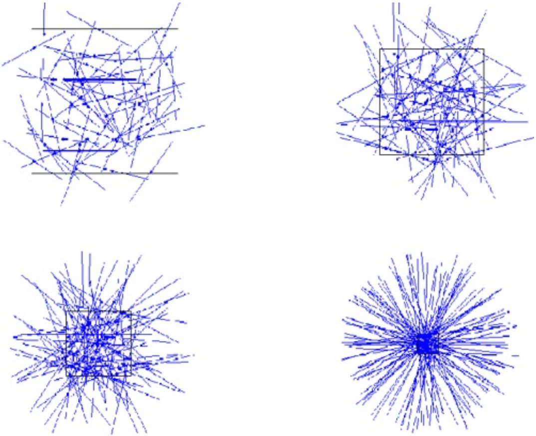
El triángulo de Sierpiński tiene dimensión $\log 3/\log 2 \approx 1{,}585$

La curva de Koch curve tiene dimensión $\log 4/\log 3 \approx 1{,}262$



La esponja de Menger tiene dimensión $\log 20/\log 3 \approx 2{,}727$

La conjetura de Kakeya



Conjetura de Kakeya: Todos los conjuntos de Besicovitch en $\mathbb{R}^n$ tienen dimensión de Hausdorff n.

Abierto para $n > 2$
Para $n = 3$ la mejor cota conocida es 5/2

La conjetura de Kakeya

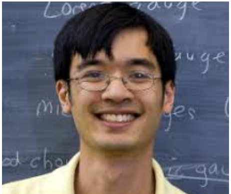
NEW BOUNDS FOR KAKEYA PROBLEMS

By

NETS HAWK KATZ AND TERENCE TAO

In memory of Thomas Wolff 1954–2000

We do not believe any part of Theorem 1.1 is sharp, nor that the techniques listed here are definitive. Moreover, since we believe that the Minkowski, Hausdorff and Maximal function problems should all have the same answer, some of the ways to progress are pretty clearly indicated. We think it would greatly benefit the field if others were to take up the challenge. That means you, gentle reader!



¿Dónde está la teoría de al información?

Definition

- Un par de algoritmos (C, D) es un compresor/descompresor si para cada entrada w, al aplicarle C y después D recuperamos w
- Nos interesa especialmente un compresor/descompresor "universal"
- $\#p$ es la longitud de una entrada/salida p

Dimensión de un punto

La dimensión de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tiene que ver con lo fácil/difícil que es comprimir x

Definition

Dado $x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{K}_r(x) = \text{ínf}\{\#p : |x - D(p)| \leq 2^{-r}\}$$

$\mathrm{K}_r(x)$ es lo que se puede comprimir el punto x con tasa de aproximación 2^{-r}

Definition

$$\dim(x) = \liminf_r \frac{\mathrm{K}_r(x)}{r}$$

Otra forma de ver dimensión de Hausdorff

- La dimensión efectiva de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es

$$sup_{x \in E} \dim(x)$$

- La dimensión de Hausdorff se puede caracterizar exactamente en términos de dimensión efectiva
- Podemos estudiar la dimensión de Hausdorff de $E \subseteq \mathbb{R}^n$ estudiando los fácil/difícil que es comprimir los puntos $x \in E$
- **¡Dimensión definida punto a punto!**

Unos cuantos resultados de teoría de la medida geométrica que usan teoría de la información

- (N.Lutz Stull 2020) conjuntos de Furstenberg (generalizar las conjuntos de Besicovitch en el conjunto de direcciones y el intervalo que deben contener), se mejoran los mejores resultados conocidos (Molter Rela 2012)
- (Bushling Fiedler 2024) Generalizar los conjuntos de Besicovitch a que contengan una línea en cada dirección
- (M. Csörnyei, EM el al 2024) Estudiar el tamaño de los conjuntos de direcciones "excepcionales" cuando proyectamos un conjunto