Líneas de investigación y TFGs

Luis Carlos García Lirola

Febrero, 2025

Departamento de Matemáticas
Universidad Zaragoza

Análisis Funcional

El **Análisis Funcional** está dedicado al estudio de espacios de funciones y sucesiones, habitualmente de dimensión infinita, y las aplicaciones lineales definidos entre ellos.

Análisis Funcional

El **Análisis Funcional** está dedicado al estudio de espacios de funciones y sucesiones, habitualmente de dimensión infinita, y las aplicaciones lineales definidos entre ellos.

- $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_n|^2\right)^{1/2}$

Análisis Funcional

El **Análisis Funcional** está dedicado al estudio de espacios de funciones y sucesiones, habitualmente de dimensión infinita, y las aplicaciones lineales definidos entre ellos.

- $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_n|^2\right)^{1/2}$
- $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$

Análisis Funcional

El **Análisis Funcional** está dedicado al estudio de espacios de funciones y sucesiones, habitualmente de dimensión infinita, y las aplicaciones lineales definidos entre ellos.

- $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_n|^2\right)^{1/2}$
- $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$
- $x = (1, 1/2, 1/4, \ldots)$. $\|x\|_2 = 2$.

Análisis Funcional

El **Análisis Funcional** está dedicado al estudio de espacios de funciones y sucesiones, habitualmente de dimensión infinita, y las aplicaciones lineales definidos entre ellos.

- $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_n|^2\right)^{1/2}$
- $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_n|^2\right)^{1/2}$
- $x = (1, 1/2, 1/4, \ldots)$. $\|x\|_2 = 2$.

Del mismo modo que una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se identifica con una matrix $n \times n$, podemos pensar en una aplicación lineal $T\colon \ell_2 \to \ell_2$ como una *matriz infinita*.

En este tema investigan los profesores Luciano Abadías, Glenier Bello, Pedro Miana y Jesús Oliva.

Análisis Funcional

El **Análisis Funcional** está dedicado al estudio de espacios de funciones y sucesiones, habitualmente de dimensión infinita, y las aplicaciones lineales definidos entre ellos.

- $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_n|^2\right)^{1/2}$
- $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$
- $x = (1, 1/2, 1/4, \ldots)$. $\|x\|_2 = 2$.

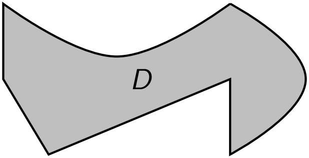
Del mismo modo que una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se identifica con una matrix $n \times n$, podemos pensar en una aplicación lineal $T\colon \ell_2 \to \ell_2$ como una *matriz infinita*.

En este tema investigan los profesores Luciano Abadías, Glenier Bello, Pedro Miana y Jesús Oliva.

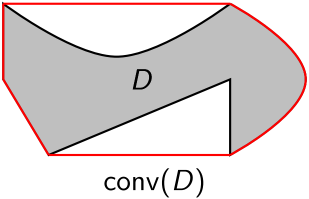
En mi caso, interesa particularmente la **Geometría de espacios de Banach**, en especial las propiedades de los conjuntos **convexos**.

En dimensión finita, esto se relaciona con la investigación de David Alonso.

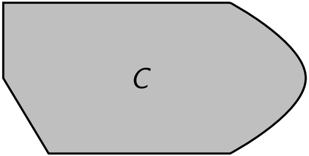
Convexidad y puntos extremos



Convexidad y puntos extremos

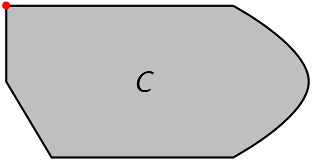


Convexidad y puntos extremos



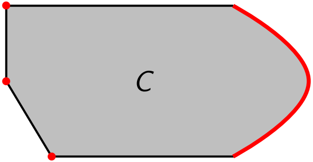
$$¿D \subset C : \mathrm{conv}(D) = C?$$

Convexidad y puntos extremos



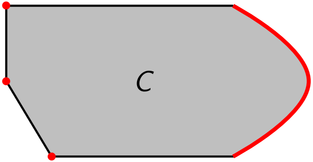
$$¿D \subset C : \mathrm{conv}(D) = C?$$

Convexidad y puntos extremos



$$¿D \subset C : \mathrm{conv}(D) = C?$$

Convexidad y puntos extremos

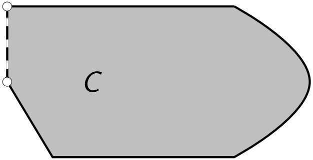


$$¿D \subset C : \mathrm{conv}(D) = C?$$

Un punto $x \in C$ es un **punto extremo** si x no es un punto interior de ningún segmento enteramente contenido en C.

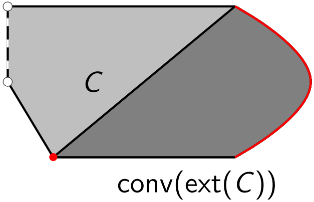
¿Qué condiciones garantizan que $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$?

Si C no es cerrado...



¿Qué condiciones garantizan que $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$?

Si C no es cerrado...



¿Qué condiciones garantizan que $C = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))$?

Si C no es acotado...

¿Qué condiciones garantizan que $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$?

Si C no es acotado...

¿Qué condiciones garantizan que $C = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))$?

Teorema (Minkowski, 1911 – Caratheodory, 1930)

Sea C un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $C = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))$.

¿Qué condiciones garantizan que $C = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))$?

Teorema (Minkowski, 1911 – Caratheodory, 1930)

Sea C un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $C = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))$.

Ojo! En dimensión infinita, cerrado+acotado $\not\Rightarrow$ compacto!
Hay conjuntos cerrados y acotados sin puntos extremos, por ejemplo:

$$C = \{\text{sucesiones } (x_n)_n \text{ con } \lim_n x_n = 0, |x_n| \leq 1\, \forall n\}$$

¿Qué condiciones garantizan que $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$?

Teorema (Minkowski, 1911 – Caratheodory, 1930)

Sea C un compacto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$.

Ojo! En dimensión infinita, cerrado+acotado $\not\Rightarrow$ compacto!
Hay conjuntos cerrados y acotados sin puntos extremos, por ejemplo:

$$C = \{\text{sucesiones } (x_n)_n \text{ con } \lim_n x_n = 0, |x_n| \leq 1\, \forall n\}$$

Teorema (Krein–Milman, 1940)

Sea C un compacto y convexo de un espacio localmente convexo. Entonces $C = \overline{\text{conv}}(\text{ext}(C))$.

Funciones Lipschitz

En particular, nos interesan estas cuestiones para espacios de funciones Lipschitz.

Sea (M, d) un espacio métrico. Una función $f\colon M \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

Funciones Lipschitz

En particular, nos interesan estas cuestiones para espacios de funciones Lipschitz.

Sea (M, d) un espacio métrico. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

Para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivable $\Rightarrow$ Lipschitz $\Rightarrow$ continua

Propuestas de TFG

Propuestas de TFG

1) Convexidad, medida y tartas

Propuestas de TFG

1) Convexidad, medida y tartas

Teorema (Dubins-Spanier, 1961)

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\mu_1, \dots, \mu_n$ medidas de probabilidad no atómincas sobre él. Dados $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ con $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, existe una partición $\{A_1, \dots, A_n\}$ de Ω de modo que $\mu_i(A_j) = \alpha_j$ para cada i, j.

Propuestas de TFG

1) Convexidad, medida y tartas

Teorema (Dubins-Spanier, 1961)

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas de probabilidad no atómincas sobre él. Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ con $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, existe una partición $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de Ω de modo que $\mu_i(A_j) = \alpha_j$ para cada i, j.

2) Espacios estríctamente convexos y uniformemente convexos

Propuestas de TFG

1) Convexidad, medida y tartas

Teorema (Dubins-Spanier, 1961)

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas de probabilidad no atómincas sobre él. Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ con $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, existe una partición $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de Ω de modo que $\mu_i(A_j) = \alpha_j$ para cada i, j.

2) Espacios estríctamente convexos y uniformemente convexos

- Un espacio normado es estríctamente convexo si $\text{ext}\, B_X = B_X$, equivalentemente,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 \quad \forall x, y \in B_X$$

Propuestas de TFG

1) Convexidad, medida y tartas

Teorema (Dubins-Spanier, 1961)

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas de probabilidad no atómincas sobre él. Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ con $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, existe una partición $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de Ω de modo que $\mu_i(A_j) = \alpha_j$ para cada i, j.

2) Espacios estríctamente convexos y uniformemente convexos

- Un espacio normado es estríctamente convexo si ext $B_X = B_X$, equivalentemente,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 \quad \forall x, y \in B_X$$

- Un espacio normado es uniformemente convexo si

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta \text{ si } x, y \in B_X \text{ con } \|x-y\| \geq \varepsilon$$

Propuestas de TFG

3) Extensiones de funciones Lipschitz

Propuestas de TFG

3) Extensiones de funciones Lipschitz

Teorema (Kirszbraun-Valentine, 1945)

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz (para la norma euclídea), existe $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que extiende a f y es Lipschitz con la misma constante.

Propuestas de TFG

3) Extensiones de funciones Lipschitz

Teorema (Kirszbraun-Valentine, 1945)

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz (para la norma euclídea), existe $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que extiende a f y es Lipschitz con la misma constante.

4) Modos de convergencia: $f_n \to f$ uniformemente, puntualmente, en casi todo punto, casi uniformemente, en L^∞, en L^1, en medida.

Propuestas de TFG

3) Extensiones de funciones Lipschitz

Teorema (Kirszbraun-Valentine, 1945)

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz (para la norma euclídea), existe $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que extiende a f y es Lipschitz con la misma constante.

4) Modos de convergencia: $f_n \to f$ uniformemente, puntualmente, en casi todo punto, casi uniformemente, en L^∞, en L^1, en medida.

Teorema (Egorov, 1911)

Sea $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones que converge a una función f en c.t.p. Entonces $f_n \to f$ casi uniformemente, es decir, $\forall \varepsilon > 0$ existe $A \subset [0,1]$ con $\mu(A) < \varepsilon$ de modo que $f_n \to f$ uniformemente en $[0,1] \setminus A$.

Propuestas de TFG

3) Extensiones de funciones Lipschitz

Teorema (Kirszbraun-Valentine, 1945)

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz (para la norma euclídea), existe $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que extiende a f y es Lipschitz con la misma constante.

4) Modos de convergencia: $f_n \to f$ uniformemente, puntualmente, en casi todo punto, casi uniformemente, en L^∞, en L^1, en medida.

Teorema (Egorov, 1911)

Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones que converge a una función f en c.t.p. Entonces $f_n \to f$ casi uniformemente, es decir, $\forall \varepsilon > 0$ existe $A \subset [0,1]$ con $\mu(A) < \varepsilon$ de modo que $f_n \to f$ uniformemente en $[0,1] \setminus A$.

5) Inducción transfinita.

$$1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega \cdot 2 \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Últimos TFGs dirigidos

- Curvas que rellenan el espacio (con G. Bello). 2024.
- El espacio donde viven los fractales. 2024.
- Lineal vs no-lineal en espacios normados. 2024
- Los teoremas de la función inversa e implícita. 2024.
- El toerema de Dvoretzky (con D. Alonso). 2023.
- Funciones holomorfas universales. 2023
- Topologías débiles en espacios de Banach. 2022.
- Funciones continuas no diferenciables en ningún punto (con A. Peña). 2022.
- El teorema del punto fijo de Brouwer y algunas aplicaciones a la Teoría de Juegos (con L. Abadías). 2021.

Gracias!