

Instituto Universitario de Investigación  
de Matemáticas  
y Aplicaciones  
**Universidad Zaragoza**



Grupo de  
Investigación en  
Educación  
Matemática  
(S60\_23R) del  
Gobierno de  
Aragón



Facultad de Ciencias  
**Universidad Zaragoza**

# Presentación de líneas de investigación matemática para estudiantes (Didáctica de las Matemática)

Mónica Arnal-Palacián  
marnalp@unizar.es

# Enseñanza y aprendizaje del límite

---

La problemática que suscita la enseñanza y el aprendizaje del límite ha sido objeto de estudio en el ámbito de la didáctica de la matemática en los últimos **50 años**.

Más recientemente, han cobrado especial interés los estudios orientados al **profesorado en formación**, al **profesorado en activo**, a **estudiantes** de bachillerato, y el análisis de **libros de texto** en un esfuerzo compartido por mejorar la formación inicial y continua de los docentes de matemáticas.

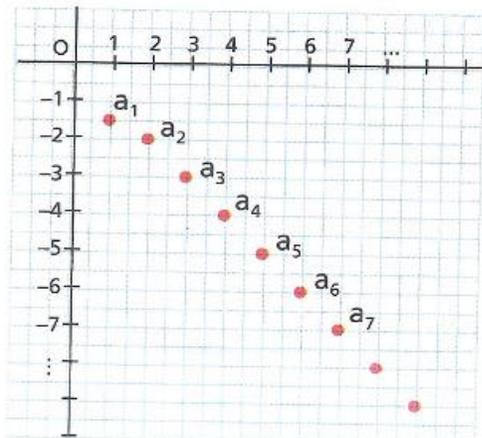
Todas estas investigaciones han permitido delimitar el conocimiento de sus dificultades, obstáculos y errores.

# Enseñanza y aprendizaje del límite

Una manera de abordar estas dificultades es utilizar diferentes enfoques, intuitivo y formal; y representaciones, algebraica, tabular, gráfica y verbal, a pesar de que en la actualidad exista una tendencia de la enseñanza del cálculo desde un enfoque algorítmico y algebraico.

Una sucesión de números reales  $a_n$  tiene por límite  $+\infty$ , cuando para todo número real positivo  $K$  existe un número natural  $n^*$ , tal que para todo  $n > n^*$ , se verifica que  $a_n > K$ .

Se escribe:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$



¿Si  $n$  se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión  $a_n = n^2 + 1$ ?

Dando valores a  $n$  cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

$n$	1	10	100	1 000	...	$\rightarrow$	$+\infty$
$a_n$	2	101	10 001	1 000 001	...	$\rightarrow$	$+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} / \text{si } n > n_0 \Rightarrow a_n > M$$

# Enseñanza y aprendizaje del límite

---

Desde un estudio fenomenológico, en el sentido dado por Freudenthal (1983), del límite ha cobrado vital importancia el considerar dos enfoques: **intuitivo** y **formal**.

Esto se justifica porque los fenómenos intuitivos son los primeros que nos permiten obtener un candidato de límite o comprobar si éste es adecuado (vinculado al PME). Sin embargo, estos fenómenos no garantizan que el candidato a límite realmente lo sea, por lo que es necesaria la intervención de los fenómenos formales (vinculado al PMA). La certeza de que lo sea vendrá determinada por el fenómeno de ida y vuelta, que permite establecer o descartar si el candidato a límite ha sido bien elegido.

# Enseñanza y aprendizaje del límite

---

Algunas referencias que pueden ser consultadas por los estudiantes para ampliación de información son: Claros et al. (2007, 2016) para límites finitos y Arnal-Palacián et al. (2020, 2022, 2024) para límites infinitos.

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., & Sánchez-Compañá, M. T. (2020). Infinite Limit of Sequences and Its Phenomenology. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), em0593.

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., & Sánchez-Compañá, M. T. (2022). Perfil del futuro docente de matemáticas en la enseñanza del límite infinito de sucesiones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36, 1087-1114.

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, F. J., & Sánchez-Compañá, M. T. (2024). Comparing the finite and infinite limits of sequences and functions: A mathematical and phenomenological analysis and its implications in Spanish textbooks. *Pythagoras-Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, 45(1), 774.

Claros, J., Sánchez, M.T., & Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, 1 (3), 125-138.

Claros, J., Sánchez, M.T., & Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933–2005. *Educación matemática*, 28(1), 125-152.

# Enseñanza y aprendizaje del límite

---

Esta línea de investigación puede albergar algunos de los siguientes tipos de trabajo:

- L1. Análisis del límite de sucesiones en manuales universitarios.
- L2. Análisis de la enseñanza del profesorado de bachillerato de la noción de límite.
- L3. Evaluación del conocimiento matemático del alumnado sobre la noción de límite.

# Enseñanza y aprendizaje del límite

## L1. Análisis del límite de sucesiones en manuales universitarios.

**3.2.8 Examples** (a) The sequence  $(n)$  is divergent.

(b) The sequence  $((-1)^n)$  is divergent.

If  $n$  is an odd natural number with  $n \geq K_1$ , this gives  $|-1 - a| < 1$ , so that  $-2 < a < 0$ . (Why?) On the other hand, if  $n$  is an even natural number with  $n \geq K_1$ , this inequality gives  $|1 - a| < 1$  so that  $0 < a < 2$ . Since  $a$  cannot satisfy both of these inequalities, the hypothesis that  $X$  is convergent leads to a contradiction. Therefore the sequence  $X$  is divergent.

**Definición 15.3.** Decimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

si para todo  $M \in \mathbb{R}$  existe un  $N \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n > M$ , si  $n > N$ . Decim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

si para todo  $M \in \mathbb{R}$  existe un  $N \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n < M$ , si  $n > N$ .

\*\*\*) Notemos que las sucesiones infinitas se denominan a veces sucesiones convergentes hacia el infinito. Por eso, si la sucesión  $\{x_n\}$  es infinita, se escribe simbólicamente así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Si los elementos de la sucesión infinita tienen, partiendo de un número, un signo determinado, se dice que la sucesión  $\{x_n\}$  converge hacia el infinito de signo determinado. Esto se escribe simbólicamente del modo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

# Enseñanza y aprendizaje del límite

---

L2. Análisis de la enseñanza del profesorado de bachillerato de la noción de límite.

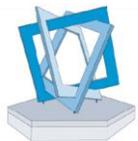
- Entrevistas a profesores en activo.
- Observación del aula durante la presentación del concepto matemático.
- Grupo de discusión sobre adecuación de algunos fragmentos.

# Enseñanza y aprendizaje del límite

---

L3. Evaluación del conocimiento matemático del alumnado sobre la noción de límite.

- Alumnado de Bachillerato y/o Máster profesorado (matemáticas)
- Elaboración de un instrumento que permita ver PME y PMA.
- Imágenes conceptuales durante el proceso de enseñanza y aprendizaje



Instituto Universitario de Investigación  
de Matemáticas  
y Aplicaciones  
Universidad Zaragoza



Grupo de  
Investigación en  
Educación  
Matemática  
(S60\_23R) del  
Gobierno de  
Aragón



Facultad de Ciencias  
Universidad Zaragoza

# Presentación de líneas de investigación matemática para estudiantes (Didáctica de las Matemática)

Mónica Arnal-Palacián  
marnalp@unizar.es