LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN PARA TRABAJOS FIN DE GRADO.

F.G. Badía [1], Berrade, M.D.[1], Sangüesa, C.[2]

[1]Departmento de Métodos Estadisticos
Universidad de Zaragoza, EINA, Zaragoza, España
[2]Departmento de Métodos Estadisticos
Universidad de Zaragoza, Facultad de Ciencias, Zaragoza, España

IUMA
8 DE MAYO 2025
ZARAGOZA, ESPAÑA.

Funciones log convexas y log concavas

Una función f definida sobre un intervalo I se dice log convexa (concava) si

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq (\geq) f(x)^{\alpha} f(y)^{1-\alpha}, \quad x, y \in I, \quad 0 < \alpha < 1$$

Si f es medible f es log convexa (concava) si y sólo sí $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq (\geq) f(x)^{\frac{1}{2}} f(y)^{\frac{1}{2}}$, $x, y \in I$
Una función f sobre I con dos derivadas es log convexa (concava) si

$$(f'(x))^2 \leq (\geq) f(x) f''(x)$$

o, equivalentemente, si $f > 0$, $f'(x)/f(x)$ is no decreciente (creciente) en $x \in I$.

Órdenes estocásticos

Denotemos F_X, $\overline{F}_X$ y f_X la función de distribución, la función de supervivencia y la función de densidad de X, respectivamente.

X se dice menor o igual que Y en orden estocástico usual (denotado $X \leq_{\text{st}} Y$) si y sólo sí $\overline{F}_X(x) \leq \overline{F}_Y(x)$ para todo x.

X se dice menor o igual que Y en orden tasa de fallo (denotado $X \leq_{\text{hr}} Y$) si y sólo sí $\frac{\overline{F}_Y(x)}{\overline{F}_X(x)}$ es no decreciente sobre $\overline{F}_X(x) > 0$.

X se dice menor o igual que Y en orden tasa de fallo reversa (denotado $X \leq_{\text{rhr}} Y$) si y sólo sí $\frac{F_Y(x)}{F_X(x)}$ es no decreciente sobre $F_X(x) > 0$.

X se dice menor o igual que Y en orden razón de verosimilitudes (denotado $X \leq_{\text{lr}} Y$) iff $\frac{f_Y(x)}{f_X(x)}$ es no decreciente sobre $f_X(x) > 0$.

Relación entre los ordenes estocásticos

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{hr} \arrow[dr] & \\
\text{lr} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{st} \\
 & \text{rhr} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Caracterización bivariada de los órdenes estocásticos

Shanthikumar and Yao (1991)
$X \leq_{\text{hr}} Y$ si y sólo sí para X^* and Y^* variables aleatorias independientes tales que $X =^{\text{d}} X^*$ and $Y =^{\text{d}} Y^*$
$E[g(X^*, Y^*)] \leq E]g(Y^*, X^*)]$ para toda función bivariada cumpliendo que $g(x, y) - g(y, x)$ is creciente x para $x \geq y$.
$X \leq_{\text{rhr}} Y$ si y sólo sí para X^* and Y^* variables aleatorias independientes tales que $X =^{\text{d}} X^*$ and $Y =^{\text{d}} Y^*$
$E[g(X^*, Y^*)] \leq E]g(Y^*, X^*)]$ para toda función bivariada cumpliendo que $g(x, y) - g(y, x)$ es creciente x para $x \leq y$.
$X \leq_{\text{lr}} Y$ si y sólo sí para X^* and Y^* variables aleatorias independientes tales que $X =^{\text{d}} X^*$ and $Y =^{\text{d}} Y^*$
$E[g(X^*, Y^*)] \leq E]g(Y^*, X^*)]$ para toda función bivariada cumpliendo que $g(x, y) - g(y, x) \geq 0$ para $x \geq y$.

Operadores de Bernstein

- Operador de Bernstein

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=E\left[f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)\right],x\in[0,1],n\in\mathbb{N}$$

$S_{n,x}$ variable aleatoria binomial de parámetros n y x.

- Operador de Szász

$$S_t(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{t}\right)\frac{(tx)^k}{k!}e^{-tx}==E\left[f\left(\frac{N_{tx}}{t}\right)\right],t,x>0$$

$\{N_r : r\geq 0\}$ es un proceso de Poisson estándar

- Operador Baskakov

$$H_t(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{t}\right)\binom{t+k-1}{t}\frac{x^k}{(1+x)^{t+k}}E\left[f\left(\frac{N_{xM_t}}{t}\right)\right],t,x>0$$

$\{N_r : r\geq 0\}$ and $\{M_r : r\geq 0\}$ procesos independencientes de Poisson estandar y gamma estandar, respectivamente.

Operadores de Bernstein

- Operador Gamma estrella

$$G^*(f,x) = \int_0^\infty f\left(\frac{\theta}{t}\right)\frac{\theta^{tx-1}}{\Gamma(tx)}e^{-\theta}d\theta = E\left[f\left(\frac{M_{tx}}{t}\right)\right], t,x>0$$

$\{M_r : r \geq 0\}$ es un proceso gamma estandar.

- Operador Gamma

$$G_t(f,x) = \int_0^\infty f\left(\frac{x\theta}{t}\right)\frac{\theta^{t-1}}{\Gamma(t)}e^{-\theta}d\theta = E\left[f\left(\frac{xM_t}{t}\right)\right], t,x>0$$

$\{M_r : r \geq 0\}$ es un proceso gamma estandar.

- Operador de Weierstrass

$$W_t(f,x) = \int_{-\infty}^\infty f(x+\theta)\sqrt{\frac{t}{2\pi}}e^{-t\frac{\theta^2}{2}}d\theta = E\left[f\left(x+\frac{D_t}{t}\right)\right], t,x>0$$

$\{D_r : r \geq 0\}$ es un proceso browniano.

Bernstein operators

- Operador Beta

$$\beta_t(f,x) = \int_0^1 f(\theta)\frac{1}{B(tx, t(1-x))}\theta^{tx-1}(1-\theta)^{tx-1}d\theta = E\left[f\left(\frac{M_{tx}}{M_t}\right)\right]$$

$0 < x < 1$, $t > 0$, $\{M_r : r \geq 0\}$ es un proceso gamma estandar.

- Operador Beta inversa

$$T_t(f,x) = \int_0^\infty f(\theta)\frac{1}{B(tx,t)}\frac{\theta^{tx-1}}{(1+\theta)^{t+tx}}d\theta = E\left[f\left(\frac{M_{tx}}{R_t}\right)\right], t, x > 0$$

$\{M_r : r \geq 0\}$ and $\{R_r : r \geq 0\}$ son procesos gamma estandar independientes.

Preservación

Si f es una función log convexa (concava) estudiar condiciones bajo las que $T_t f$ es log convexa (concava) para un operador de Bernstein T_t. Las condiciones para la preservación de la log convexidad son menos exigentes que las de la log concavidad.

$\{X(t) : t \geq 0\}$ subordinador con incrementos no negativos, $E[f(X(t)]$ es una función log convexa para f log convexa.

$\{X(t) : t \geq 0\}$ subordinador con incrementos no negativos, $X(t) \uparrow_{lr}$ $E[f(X(t)]$ es una función log concava para f log concava.

Introducción

Las mixturas mejoran las propiedades de edad de las distribuciones que componen la mezcla.
Sean $F(x,\theta)$, $\overline{F}(x,\theta)$, $r(x,\theta)$, $m(x,\theta)$ la función de distribución, fiabilidad, tasa de fallo y vida media residual de la mixtura cuando la variable mezcladora Θ toma el valor θ. G función de distribución de Θ.

$$m(x,\theta) = E[X_\theta - x | X_\theta > x]$$

Sea X^* la mixtura de la familia de variables aleatorias $\{F(x,\theta) : -\infty < \theta < \infty\}$.

Características de edad de las mixturas

$$\begin{aligned}
F^*(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x,\theta)dG(\theta) \\
\overline{F}^*(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(x,\theta)dG(\theta) \\
r^*(x) &= E[r(x,\Theta)|X^* > X] \\
m^*(x) &= E[m(x,\Theta)|X^* > X]
\end{aligned}$$

$$\pi_{\Theta|X^*>x}(\theta) = \frac{\overline{F}(x,\theta)dG(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} F(x,u)dG(u)}$$

Propiedades de edad y de doblamientos (bending)

Si $r(x,\theta)$ decreciente en x para todo θ, $r^*(x)$ decreciente.
Si $m(x,\theta)$ creciente en x para todo θ, $m^*(x)$ mcreciente.
$r^*(x) \leq E[r(x,\Theta)$ bending débil de la tasa de fallo
$r^*(x) - E[r(x,\Theta)$ es decreciente en x bending fuerte de la tasa de fallo
$m^*(x) \geq E[m(x,\Theta)$ bending débil de la vida media residual
$m^*(x) - E[m(x,\Theta)$ es creciente en x bending fuerte de la vida media residual

Propiedades de edad y bending de la varianza residual y vida media residual ponderada en mixturas

$$\sigma^2(x, \theta) = Var[X_\theta - x | X_\theta > x]$$

$$m_\phi(x, \theta) = E[\Psi(X_\theta) - \Psi(x) | X_\theta > x]$$

$\Psi'(x) = \phi(x)$

Familias de mixturas

- Tasa de fallo proporcional

$$r(x, \theta) = \theta r(x)$$

- Vida media residual proporcional

$$m(x, \theta) = \theta m(x)$$

Introducción

- Mantenimiento preventivo: por número de fallos o periódico
- Mantenimiento correctivo
- Mantenimiento basado en la condición

Función de coste

Coste esperado por unidad de tiempo
$Q = Q(T, N) = Q(T_1, T_2, N)$

$$Q = \frac{E[C(\tau)]}{E[\tau]}$$

$C(\tau)$ y τ coste en un ciclo y longitud de un ciclo. Un ciclo es el tiempo entre dos renovaciones consecutivas de un sistema.
Costes:

- c_{PM} coste del mantenimiento preventivo
- c_r coste de mantenimiento correctivo.
- c_i coste de inspección.
- c_d coste por unidad de tiempo cuando el sistema esta inadvertidamente en estado de fallo.
- c_N coste de mantenimiento tras el fall N-ésimo.