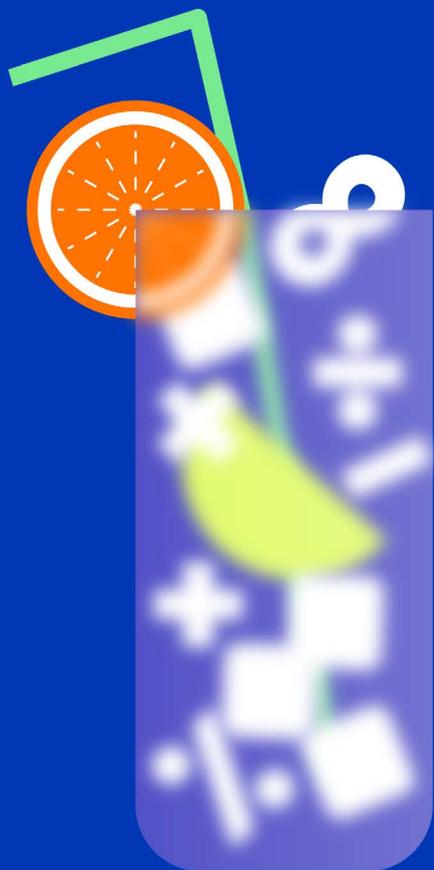


Matemáticas Animadas

Exposición



GUÍA EXPOSICIÓN

→20 de octubre de 2022

al 30 de enero 2023

etopia_

Índice

INTRO MATEMÁTICAS ANIMADAS.....	5
VINETAS ANIMADAS.....	7
CRISTÓBAL VILLA, ARTISTA INFOGRAFISTA 3D.....	11
HUMOR MATEMÁTICO EN SERIES DE ANIMACIÓN	13
DEMOSTRACIONES ANIMADAS	19
LAS MATEMÁTICAS DE M.C. ESCHER	23
VENTILADOR HOLOGRÁFICO	25
SECUENCIAS MATEMÁTICAS.....	27
SIN ELLAS LAS MATEMÁTICAS NO SERÍAN IGUAL	31
LAS MATEMÁTICAS, FRACTALES Y COLABORATIVAS.....	33

Una iniciativa del Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones de la Universidad de Zaragoza en colaboración con la Universidad de La Rioja, Casa de las Ciencias y el Ayuntamiento de Zaragoza a través de Etopía Centro de Arte y Tecnología.

Título: Matemáticas animadas

Fechas: del 20 de octubre de 2022 al 31 de enero de 2023

Comisarios: Pedro J. Miana (IUMA-UZ) y Luis Rández (IUMA-UZ)

Comisión organizadora: Julio Bernués (IUMA, UZ), Daniel Rodríguez (UR), Natalia Romero (UR) y Raquel Villacampa (IUMA, UZ)

Museografía y producción ejecutiva: Marfa Blasco

Diseño gráfico: San Jimes

Montaje expositivo: Brigadas municipales de Arquitectura, Oficiales Mantenimiento de Etopía y Trazacultura

Producción técnica y comunicación: Ayuntamiento de Zaragoza



Matemáticas Animadas

No, no lo negamos. Las Matemáticas son una ciencia difícil, complicada y que requieren trabajo y esfuerzo. Estas cualidades son comunes a la ciencia, al arte o al deporte. Esperemos que no os hayamos hecho huir y continuéis leyendo las siguientes líneas.

Pero también son atractivas, interesantes y muy animadas. Su belleza y magia permanentes se encuentran en su increíble aplicabilidad en múltiples aspectos de la realidad y en la abstracción de las teorías más inaccesibles.

Las Matemáticas no conocen edad, raza, religión, sexo, ideología, o frontera. Son verdades eternas que estaban aquí antes que nosotros, y continuarán aquí, después de nosotros. El teorema de Pitágoras, los sólidos platónicos o los fractales existirían sin que nosotros los hubiéramos descubierto. Y sin duda nuestra existencia se enriquece con cada descubrimiento matemático que realizamos. El escritor inglés Oscar Wilde afirmaba:

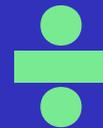
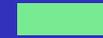
«El arte es la ciencia de la belleza, las matemáticas son la ciencia de la verdad»

En esta exposición nos acercamos a teoremas, proposiciones, identidades e incluso curiosidades matemáticas desde el entretenimiento, el humor, el arte o la tecnología. Nuestro objetivo es enseñar Matemáticas, y mostrar que esta enseñanza se puede hacer desde una viñeta humorística, un programa de televisión o desde un grabado de un artista mundialmente conocido.

Agradecemos a todos los creadores involucrados, en particular a Alberto Montt, Cristóbal Vila, El Roto, Forges o Míngote su participación, y sobre por sus extraordinarias obras. A la Universidad de La Rioja, al Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones (IUMA) de la Universidad de Zaragoza, a la Casa de las Ciencias y al Ayuntamiento de Zaragoza a través de Etopia Centro de Arte y Tecnología.

Al terminar la visita, os pedimos que volváis la vista atrás, y penséis unos instantes si como afirma el divulgador Marcus du Sautoy:

«Las matemáticas tienen belleza y romance. El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario; merece la pena pasar el tiempo allí»



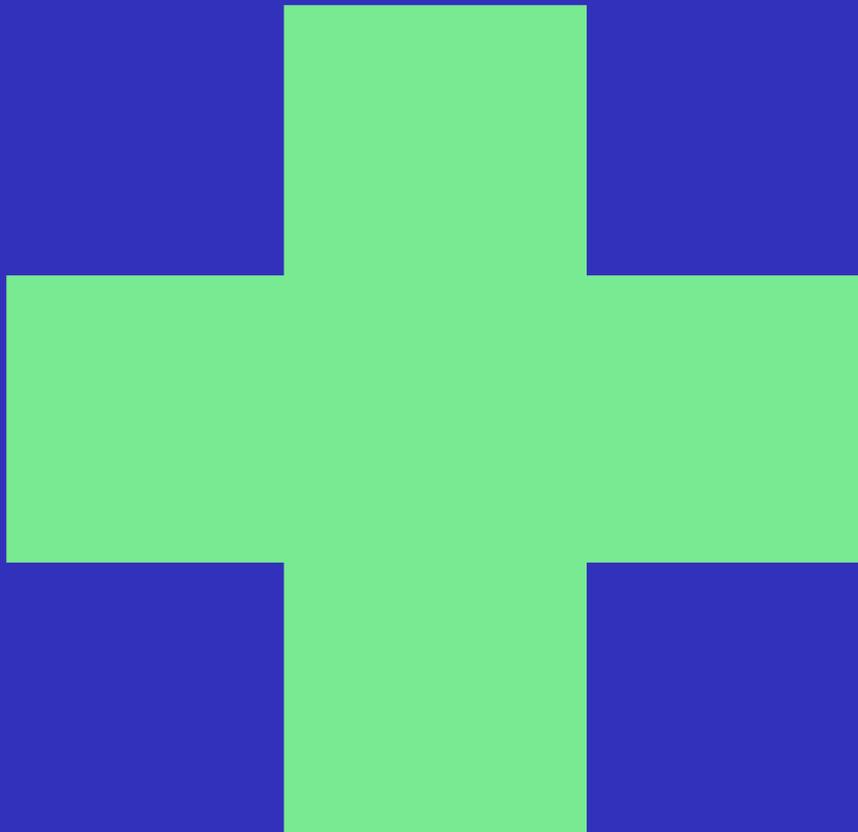
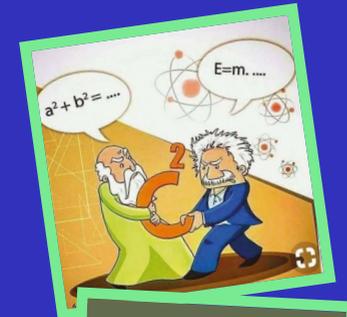
Viñetas Matemáticas

La viñeta, germen de la historieta gráfica y del cómic (en España tebeo) se considera una manifestación artística, en la que se emplean dibujos combinados con palabras para describir una situación o para contar una historia. Las viñetas constituyen un soporte gráfico para transmitir un mensaje, empleando una representación icónica, complementando a mensajes literales. Este arte invade nuestras revistas y periódicos, tratando de representar de manera plástica noticias y relatos del entorno. Afortunadamente, las matemáticas, como ciencias del entorno, no han sido ajenas a las viñetas, y han aparecido muchas historietas gráficas que tratan sobre aspectos matemáticos, bien porque su fin es divulgar las matemáticas, o por emplear conceptos y herramientas matemáticas para transmitir su mensaje.

Las viñetas tienen diversas cualidades que facilitan la comunicación. El lenguaje de las viñetas es plástico en el sentido que añade a la comunicación literal un componente icónico que facilita la percepción del mensaje. Las viñetas permiten una comunicación global, que se capta mediante un simple golpe de vista, dando lugar a un mensaje completo. Las viñetas pueden sugerir imágenes mentales variadas, relacionadas con el mundo de experiencias del sujeto, de una manera más directa. Finalmente, las viñetas añaden al mensaje literal otras formas de representación, lo que puede servir de apoyo al mensaje, además de facilitar la recepción a quienes tienen estilos de aprendizaje figurativo.

Las personas que se dedican a las matemáticas no han sido ajenas a esta manifestación artística y comunicativa. Así que algunas se han convertido en autores de viñetas e historietas gráficas. Ian Stewart, matemático de reconocido prestigio, elaboró una serie de historietas gráficas sobre temas meramente matemáticos, con títulos tan sugerentes como *¡Ah, los bonitos grupos!* (1980). En nuestro país, los matemáticos José Luis Carlavilla Fernández y Gabriel Fernández García publicaron su *Historia de las matemáticas en cómic* en 1988.

A continuación presentamos una selección de viñetistas nacionales y extranjeros. Destacamos las obras de cuatro grandes creadores, *Mingote*, *Forges*, *El Roto* y *Alberto Montt*. Otros creadores, entre ellos, *Cuttlas*, *El Perich*, *Mora*, *Iñaki* y *Frenchy*, *Sendra*, *JM Nieto*, *Kent*, *Daniel Paz*, *Glasbergen*, *Kappel* y *Tropea*, también nos han dejado perlas humorísticas y matemáticas en forma de viñeta.



1. Antonio Mingote

Ángel Antonio Mingote Barrachina (1919-2012) dibujante, escritor, periodista, miembro de la Real Academia Española (RAE) y durante casi 60 años colaborador del diario ABC. Inició su carrera como humorista gráfico en la revista *La Codorniz* en 1946, y en 1948 publicó su primera novela, *Las palmeras de cartón*.

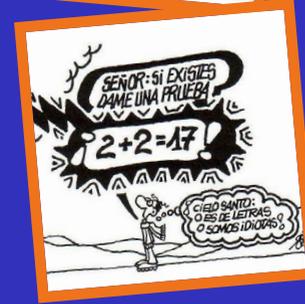
En 1967 la Prensa Española instituyó el premio que lleva su nombre y que le fue concedido en su primera edición. Este prestigioso galardón reconoce los trabajos excelentes de humor y periodismo gráfico. En 1987 fue nombrado miembro de la Real Academia Española y pasó a ocupar el sillón "r". En 1996 recibió la Medalla de Oro al Mérito en el Trabajo junto al escritor Camilo José Cela y el poeta Rafael Alberti. Sus chistes han sido reproducidos y traducidos en la prensa extranjera incluyendo *The New York Times* y *The Daily Telegraph*.

En los más de 16.000 dibujos que realizó Antonio Mingote se combina en perfecto equilibrio dosis de ironía, crítica social, humor, ternura, y elegancia. Los temas que tratan son universales y atemporales por lo que se pueden seguir disfrutando por mucho tiempo que pase. Cada viñeta contiene verdades eternas de sociología, antropología, poesía, y en nuestro caso, de ciencia, educación y Matemáticas. En 2008, publicó conjuntamente con el historiador de la ciencia, José Manuel Sánchez Ron el libro *¡Viva la Ciencia!* cuyo segundo capítulo está dedicado a las Matemáticas.

2. Forges

Antonio Fraguas de Pablo, Forges, (1942-2018) comenzó a trabajar a los 14 años en Televisión Española, medio que abandona en 1973 para dedicarse profesionalmente al humor gráfico. Publica su primer dibujo en 1964 en el diario Pueblo y posteriormente en Informaciones, para pasar a colaborar en *Hermano Lobo*, *Por Favor* y *El Jueves*. Tras dibujar para el Diario 16 y El Mundo, publica su primera viñeta en *El País* en 1995.

En radio ha participado en programas como *Protagonistas*, de Luis del Olmo, *La ventana*, con Javier Sardá y Gemma Nierga y en *No es un día cualquiera*, de RNE, con Pepa Fernández. Ha dirigido dos películas y cuatro series de humor en televisión. Desde 1972, año en que publicó su primer libro, Forges no ha dejado de publicar libros



de distinta temática, llegando casi a los 30 volúmenes. En 2014 publicó *El Libro (del los 50 años)* de Forges, un recopilatorio de algunas de sus mejores viñetas.

Ha recibido varios importantes galardones, entre los que destacan el Premio a la Libertad de Expresión de la Unión de Periodistas de España o la Creu de Sant Jordi, de la Generalitat de Catalunya. En 2007, el Consejo de Ministros le concede la Medalla de Oro al Mérito en el Trabajo. En 2011, recibe la Medalla de Oro al Mérito en las Bellas Artes. En diciembre de 2013 es distinguido con el Premio Nacional de Periodismo Pedro Antonio de Alarcón, en reconocimiento a toda su trayectoria.

En su estilo se distinguen unos personales bocadillos de línea negra gruesa y un estilizado lenguaje extraído directamente de la calle. «Inventor» de palabras (*gensanta*, *stupendo*, *firulillo*, *esborcio*, *tontolcool*, etc.) incluye el taco o palabra malsonate tachada en los textos de sus dibujos para atenuar su presencia. En su obra ocupa un lugar fundamental el costumbrismo y la crítica social, incluyendo una extensa iconografía de personajes y situaciones cómicas de la España contemporánea donde también aparecen las Matemáticas.

3. El Roto

Andrés Rábago (Madrid, 1947) es un pintor y dibujante con más de 50 años de carrera. Durante los años setenta y ochenta y bajo el seudónimo de OPS, colaboró en numerosos medios, como *Hermano Lobo*, *La Codorniz*, *Triunfo* o *Madriz*. La obra de esta primera etapa hacía referencia conceptualmente al inconsciente y estéticamente próximo al surrealismo y al movimiento Pánico, fundado entre otros, por el dramaturgo y cineasta Fernando Arrabal.

Con la llegada de la democracia OPS fue silenciándose para Rábago iniciar una nueva etapa. Bajo el seudónimo, El Roto, su sátira social trata cada día de romper la condición del individuo contra la masa y despertar la conciencia de un pueblo anestesiado. Los dibujos de El Roto se han publicado en periódicos como Diario 16 o *El Independiente* y desde hace años en *El País*.

Paralelamente al dibujo y bajo la firma A. Rábago, la pintura ha estado siempre presente en la trayectoria de autor. A menudo su obra nos lleva a un territorio espiritual desde donde observa una realidad que se define a partir de su experiencia. Su obra ha sido objeto de numerosas

exposiciones en galerías e instituciones. En 2012 recibió el Premio Nacional de Ilustración, otorgado por el Ministerio de Cultura por toda su obra gráfica.

4. Alberto Montt

Alberto José Montt Moscoso (Quito, 1972) es un diseñador gráfico y artista plástico ecuatoriano-chileno conocido por su blog de ilustraciones, *Dosis diarias*, donde publica sus viñetas desde el año 2006. Recibe de media 25.000 visitas por viñeta y algunas son de contenido matemático.

Nació en Ecuador, donde estudió diseño gráfico y artes plásticas. Después de graduarse trabajó en las revistas *Gestión*, *Diners Club* y en el suplemento *La Pandilla* del periódico *El Comercio*. En 1998 se mudó a Santiago de Chile donde vive actualmente en el barrio de Providencia. Ha colaborado en el diario *El Mercurio*, las revistas *Qué pasa*, *Capital* y *Blank*, además de ilustrar libros infantiles.

Ha colaborado en la publicación de más de 40 libros, entre ellos, *Para ver y no creer* (2001); *En dosis diarias* (2008) y *El Código de la Amistad* de Chivas Regal (2012). Ha sido nominado a varios premios de ilustración gráfico, consiguiendo en 2011 el galardón *The BOBs* al «Mejor weblog en español» por *Dosis diarias* otorgado por el servicio de radiodifusión alemán Deutsche Welle.

En su blog, presenta sus dibujos sin encargos, ni presiones de tiempo, ni exigencias comerciales. Su estilo parece sacado de un libro infantil, la inspiración surge de la vida diaria (una canción, un libro...) y usa personajes conocidos. Como él ha afirmado:

«Pongo en imágenes aquello que pienso y de esta forma ahorro mucho dinero en psicólogos»



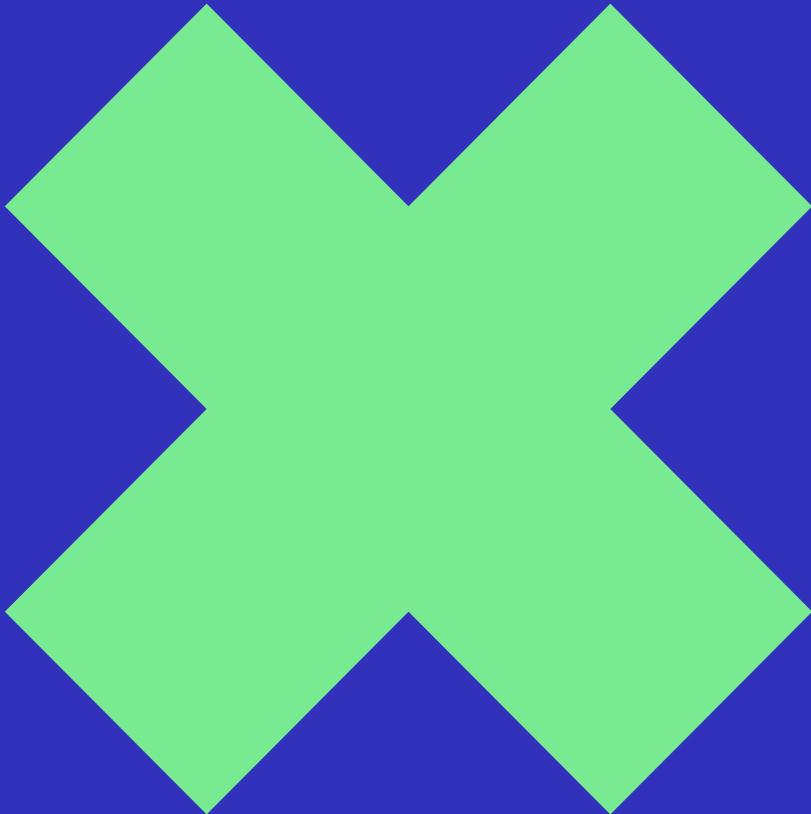
Cristóbal Vila, Artista Infografista 3D

Cristóbal Vila Laguarta (Ginebra, 1966) es licenciado por la Facultad de Bellas Artes de Sant Jordi de la Universidad de Barcelona, especialidad en Diseño Gráfico e Industrial. Sus más de 30 años de trayectoria profesional han discurrido entre varios estudios de grafismo y agencias de publicidad de Barcelona ("Jerez y Asociados") y Zaragoza ("MicroPrint", "Voca") y su propio despacho (primero "Vila Diseño", luego "Etereas") trabajando siempre como infografista 3D, ilustrador, diseñador y director de arte.

Entre sus proyectos e hitos en su trayectoria profesional destacamos el video presentación de la Plataforma Logística de Zaragoza (Plaza) en 2001; videos corporativos de la multinacional alemana de productos cosméticos Kadus; y las infografías para la compañía de simuladores de vuelo Elco Sistemas, filial de TecnoBit.

Asimismo es destacable su participación en videos científicos por encargo como "Flora amenazada en Aragón" producida por el Gobierno de Aragón o simulaciones de los diferentes eventos que condujeron a la extinción de los dinosaurios, que puede disfrutarse en el parque temático de Dinópolis (Teruel).

El genio y arte de Cristóbal Vila se muestra en su máximo esplendor en sus creaciones artísticas personales. Su amor, dedicación y conocimiento de las Matemáticas se aprecian en las obras "Nature by Numbers" (2010), "Ars Qubica" (2015) e "Infinite Patterns" (2019), que presentamos en esta muestra. En su web www.etereaestudios.com se puede disfrutar, entre otras, de "Isfahan" (2005), un paseo por la arquitectura persa; "Inspirations" (2012), un recorrido por el estudio de M.C. Escher o "Wabi-Sabi" (2016), una deliciosa y sensual excursión por los jardines nipones.

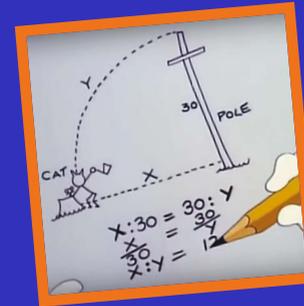


Humor Matemático en Series de Animación

Podemos encontrar una amplia variedad de situaciones donde las Matemáticas aparecen tanto en series de televisión como en películas de animación. En la mayoría de las ocasiones se presentan con el significado de dificultad o complicación. El protagonista, o bien las resuelve satisfactoriamente (las menos) o bien fracasa por su falta de preparación. Aparecen tanto en series para público infantil como para creaciones para adultos. Se utilizan para contar, medir, o incluso engañar. En las últimas décadas han aparecido varias series que presentan las Matemáticas desde un punto de vista más innovador y educativo: resuelven problemas de la vida real e incluso sirven para evitar la destrucción del ciberespacio.

1. Tom y Jerry

En el capítulo 41, *Olvida tus problemas* (1949) una cría de pájaro carpintero confunde al ratón Jerry con su madre. El ratón quiere evitar la confusión, pero pronto se verá obligado a protegerle de los ataques del insistente gato Tom. En una secuencia, para salvar a Jerry de las garras de Tom, el pájaro carpintero idea taladrar la base de un poste y que este caiga sobre el gato. El cálculo realizado por la cría de pájaro no tiene sentido alguno, así como la conclusión obtenida. No obstante, consigue su objetivo y libra a Jerry.

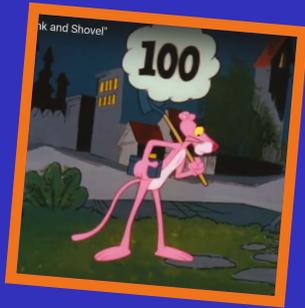


2. Donald

en el país de las Matemáticas (1959). El pato Donald, rifle en mano, es un explorador que al cruzar una enorme puerta entra en el desconocido mundo de las Matemáticas. En este extraño mundo de fantasía hay árboles con raíces cuadradas, un río de números y un lápiz vivo que escribe cifras en el suelo. El "Espíritu de la Aventura" guiará a Donald a través de la música, el arte, la arquitectura y la naturaleza donde descubrirá la importancia y la belleza de las Matemáticas. La película fue nominada al Óscar al mejor cortometraje documental y se convirtió en el video educativo más popular realizado por Disney. El propio Walt Disney comentaba:

«Los dibujos animados son un buen medio para estimular interés. Recientemente hemos explicado las matemáticas en una película y de esa forma aumentó el interés público en este tema tan importante»





3. La Pantera Rosa

En el episodio 104, *Pala Rosa*, (1978) la Pantera Rosa encuentra un billete de 5 dólares. Para evitar que se lo roben, lo entierra a 100 pasos de su casa. Al día siguiente un gran hotel ha sido construido sobre el lugar elegido. Con la única referencia de los 100 pasos, la Pantera Rosa luchará para localizarlo.



4. Érase una vez el hombre

En el capítulo 6, *El siglo de Pericles* (1978) el Maestro crea un reloj solar donde escribe las horas utilizando sucesivamente el sistema de numeración arábiga, romana y griega. En esta sencilla secuencia se muestra un hecho clave para la evolución de la aritmética y posteriormente de las Matemáticas: la invención de las cifras indo-arábigas: 0,1,2,3,4...



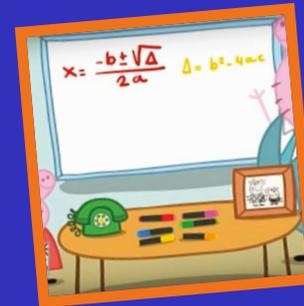
5. Campeones (Oliver y Benji)

Aunque esta serie de animación, emitida por primera vez en 1983 en Japón, no contiene Matemáticas de forma explícita, ha animado a científicos a desarrollar los cálculos necesarios para entender la física de sus extraordinarias jugadas. Así, en la web www.lawebdefisica.com/humor/oliver/ se calcula que en Japón la gravedad debe ser 100 veces menor que en el resto del planeta. Esto permitiría a Benji realizar sus acrobacias. Dado que la portería empieza a aparecer cuando nos acercamos a la tercera parte del campo, se determina que la longitud del terreno de juego es de un kilómetro y medio y su anchura por tanto de 700 m (frente a los 105 m x 68 m del Santiago Bernabeu).



6. Cyberchase

Los protagonistas de la serie son tres niños, Jackie, Matt e Inez y sus aventuras transcurren en el Ciberespacio. Los tres niños acompañados de Digit, un cyborg-pájaro, luchan contra el villano Hacker para salvar a la placa base Motherboard, guardiana y cuidadora de todo el Ciberespacio. Las matemáticas y las experiencias en la resolución de problemas son la principal arma que emplean en esta lucha.



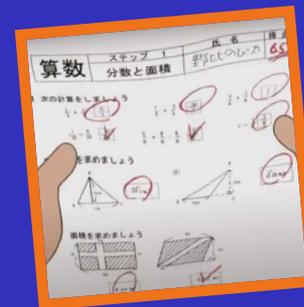
7. Peppa Pig

En el capítulo 130 *Números* (2009) de la famosísima serie Peppa Pig, atendemos a un día de la clase de Madame Gazelle. Peppa y sus amigos aprenden a contar, y a continuación se divierten contando en juegos tradicionales como la pídola, la comba, o el hula hoop. En el capítulo 23 (2007), *En la oficina de Papa Pig*, Peppa y George acuden al trabajo de Papa Pig en un día especial. Aunque la explicación con conceptos matemáticos no tiene ningún sentido, aparece la solución de una ecuación de segundo grado, con la expresión explícita del discriminante.



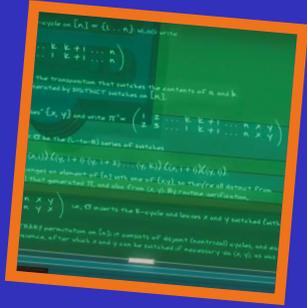
8. Los Simpson

Son notables los guiños matemáticos que contiene esta exitosa serie. Entre sus guionistas se encuentra varios licenciados en matemáticas y en físicas de la Universidad de Harvard. En el capítulo 378, *Marge, Homer y el deporte en pareja* (2006) Homer debe adivinar el número de asistentes a un partido de béisbol. Se le ofrecen tres números similares en apariencia: 8191, 8128 y 8208. Sin embargo, los tres números tienen propiedades especiales y diferentes: $8191=2^{13}-1$ y por tanto es uno de los llamados primos de Mersenne; 8128 es el cuarto de los llamados números perfectos, iguales a la suma de sus divisores. $8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$. Los tres primeros números perfectos son el 6, el 28 y el 496, y se desconoce si hay infinitos. Finalmente, 8208 es uno de los números narcisistas de cuarto orden, esto es, $8208=8^4+2^4+0^4+8^4$, una rareza.



9. Doraemon

En el capítulo 324, *Nobita también piensa a veces* (2009) el protagonista Nobita tiene que aprobar un examen de Aritmética ante la amenaza de su profesor Sensei de retrasarle a la clase de infantil si vuelve a sacar un cero. Con la ayuda de su amigo Doraemon y los discos de las habilidades, consigue sobresalir en atletismo, béisbol, e incluso en Matemáticas. Tras utilizar el disco del Pensador, reflexiona, devuelve los discos y estudia duro durante toda la noche para sacar un brillante 6,5.



10. Futurama

Parte de los guionistas matemáticos de Los Simpson colaboraron en esta nueva creación, entre ellos David X. Cohen y Ken Keeler. Este último enunció y probó el llamado *Teorema de Futurama*. En el episodio 98, *El prisionero de Benda* (2010) el profesor Farnsworth y Amy deciden utilizar una máquina para intercambiar sus cerebros. Cuando intentan volver a sus cuerpos originales, descubren un error en el diseño de la máquina: no permite que un mismo par de cuerpos entre en la máquina más de una vez. El problema general que se plantea es si existe una manera de recuperar los cuerpos originales, introduciendo nuevos cuerpos en la máquina. Finalmente Farnsworth consigue probar que no importa cómo un grupo de personas haya intercambiado sus mentes, siempre es posible que cada persona recupere su cuerpo usando como mucho dos personas extras. Probablemente era la primera vez que un teorema era enunciado y demostrado en un guion televisivo.

11. Bob Esponja

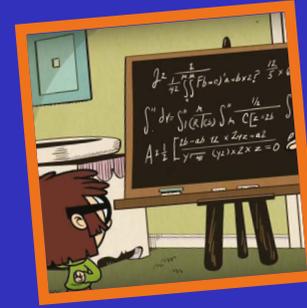
En el capítulo 174, *Para comer aquí o para llevar* (2012), aparece esta tarjeta de tiempo. Trasmite claramente una imagen de las Matemáticas aceptada socialmente: *A lot of boring math later*, Muchas matemáticas aburridas más tarde.

12. Peg + Gato

En esta cuidada serie de dibujos animados, una niña, Peg, acompañada de su fiel amigo Gato, resuelven problemas que surgen en sus aventuras con ayuda de las Matemáticas. Pensada para niños de 3 a 6 años, fue estrenada en 2013, con éxito de crítica, recibiendo varios premios. La música, la poesía y la historia (aparecen personajes como Albert Einstein, Madame Curie, Ludwig van Beethoven, Cleopatra o George Washington) también tienen su espacio en esta deliciosa creación.

13. Blaze y los monster machines

En cada capítulo de esta serie de animación, se trabajan conceptos incluidos en los campos STEM (acrónimo inglés de Science, Technology, Engineering y Mathematics). En el episodio 15, *Hay problemas en el túnel de lavado* (2015), el vehículo Blaze y su conductor AJ, deben recuperar las piezas del lavacoches. Para ello utilizarán adecuadamente diversos ángulos que les conducirán a cada una de las piezas.



14. Casa de Locos

En el capítulo 21, *Efecto mariposa* (2016), Lincoln pone en marcha, por accidente, una reacción en cadena de efectos impredecibles. Su hermana Leni, al golpearse la cabeza, se convierte en un genio corrigiendo los hallazgos de la científica de la familia, Lisa. Debido a la sensación de que su mundo se ha acabado, Lisa se da por vencida en la ciencia y consigue un trabajo de empleada en una gasolinera. Ni en lo escrito en la pizarra ni lo dicho por los protagonistas, tiene el más mínimo sentido matemático, pero logra su efecto narrativo.



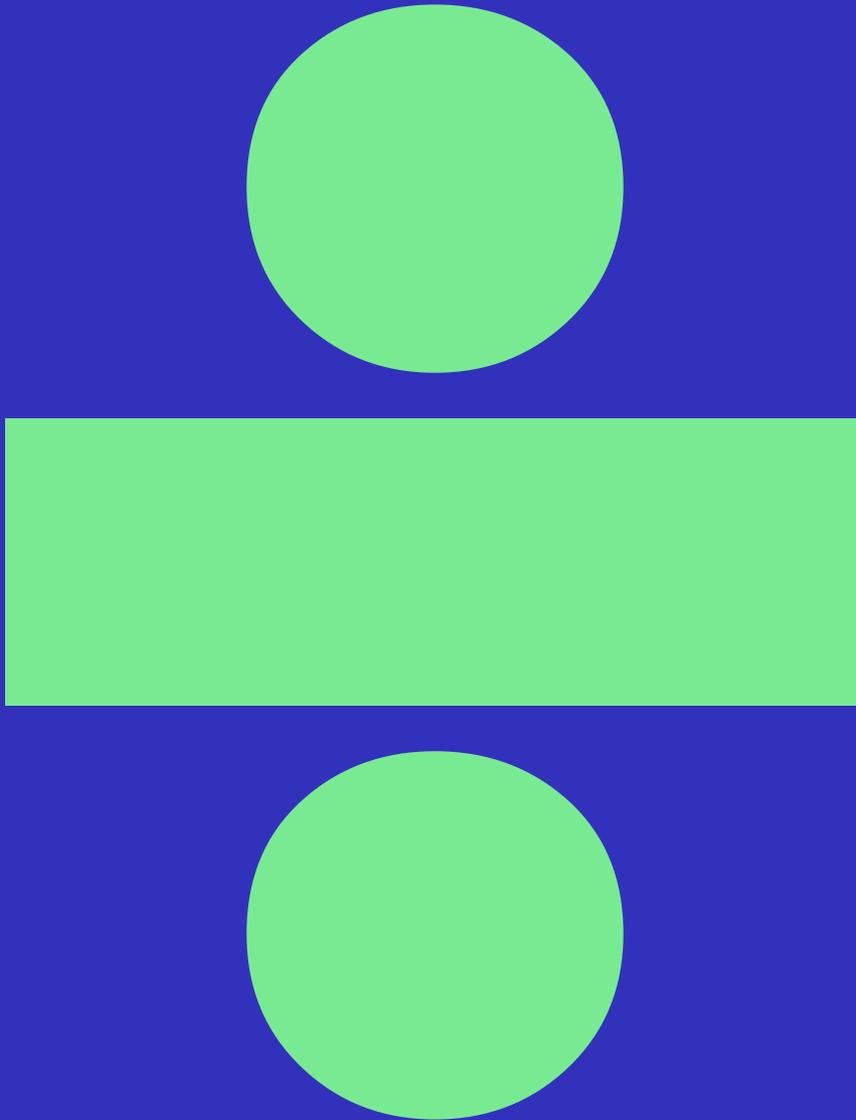
15. Dennis y Gnasher

Desenfrenados. En el capítulo 5, *Fuga de Azkabash* (2017), el protagonista Dennis acompañado de su fiel amigo Gnasher deben escapar del colegio para poder participar en una carrera. En su huida, cruzan por el pasillo del Departamento de Matemáticas y Gnasher mira fijamente a uno de los posters matemáticos. Esto le produce una alucinación pasajera en la que ve formas y fórmulas matemáticas. Este "superpoder matemático" les ayuda a escapar del colegio.

16. Padre de familia

Capítulo 285, *Padre de las grasas saturadas* (2017). Cuando Lois Griffin decide cocinar saludable, el protagonista Peter Griffin prepara varios sándwiches de salchichas en su coche. Vende dos ellos a sus vecinos por diez dólares cada uno. El resultado final de la operación requiere una profunda capacidad mental del protagonista.





Demostraciones animadas

En Matemáticas, una demostración o prueba es un argumento deductivo para comprobar la veracidad de una proposición o enunciado matemático. En la argumentación se pueden usar afirmaciones iniciales o axiomas y otras afirmaciones previamente ya demostradas. Las demostraciones son ejemplos de razonamientos deductivos y no hay que confundir con otros argumentos empíricos, casos particulares aportados por la realidad. Una demostración debe demostrar que la afirmación siempre es verdadera, al cumplirse las condiciones de la afirmación.



No todas las afirmaciones se pueden demostrar a partir de un sistema de axiomas. Una sentencia que no es demostrable ni positiva ni negativamente desde un conjunto de axiomas se dice *indecidible*. Durante siglos se creyó que el quinto postulado de Euclides podía demostrarse a partir de los cuatro anteriores. No fue así y su negación permitió la construcción de las geometrías no-euclídeas (por un punto exterior a una recta o bien no se pueden trazar una paralela a la recta o al menos dos).

El Teorema de Incompletitud de Gödel muestra que muchos sistemas de axiomas de interés matemático tienen sentencias indecidibles. Incluso se elabora una *lista negra* de afirmaciones que incluye las que no se puede probar.

Una conjetura es una afirmación no demostrada que se considera verdadera. La demostración de una conjetura famosa supone un logro similar a la conquista de una cima montañosa. Una de las conjeturas más famosas se debe al matemático Christian Goldbach, quien en una carta fechada el 7 junio de 1742 propuso al genio Leonard Euler la siguiente afirmación:

«Todo número par mayor que dos puede ser obtenido como suma de dos números primos»

Existen muchos tipos de demostraciones. Supongamos que queremos demostrar la proposición *si p entonces q*, donde *p* es la hipótesis (condición suficiente) y *q* es la tesis o conclusión (condición necesaria). En la demostración directa se buscan razonamientos lógicos para llegar de *p* a *q*. En la reducción al absurdo, se niega la tesis *q* y se llega a una contradicción lógica con la hipótesis *p*. En una demostración por inducción, se comprueba un caso inicial y se plantea un razonamiento para pasar de un caso al siguiente. En las últimas décadas se han aceptado demostraciones realizadas por ordenadores con programas certificados.

En este apartado presentamos demostraciones visuales, o tal vez, mejor dicho, demostraciones mecánicas o animadas. Aunque no son demostraciones formales, nos proporcionan recursos fantásticos, visuales y manuales, para la comprensión de los enunciados y continuar con un posterior trabajo intelectual individual.

Suma y diferencia al cuadrado

El cuadrado de una suma **NO** es la suma de los cuadrados. Para que se de la igualdad, es necesario añadir los dobles productos:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Algebraicamente, significa que la suma y elevar al cuadrado no son operaciones conmutativas, el orden en que se realizan **SÍ** importa. La conmutatividad en la vida real no suele darse, un ejemplo bien conocido es ponerse los calcetines y los zapatos.

Si escribimos en vez de b , su opuesto $-b$, se obtiene la igualdad para la diferencia al cuadrado:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

En estas igualdades las letras a y b pueden ser números, funciones, o incluso incógnitas. En nuestro mecanismo, a y b son longitudes concretas, los cuadrados son áreas, y las igualdades son identidades entre las diversas áreas de las figuras.

Suma al cubo

Por supuesto el cubo de una suma **NO** es la suma de los cubos. Para que se de la igualdad, es necesario añadir otros sumandos:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2.$$

De nuevo en esta igualdad, las letras a y b pueden ser números, funciones, o incógnitas. En nuestro caso, a y b son longitudes concretas, los cubos son volúmenes, y las igualdades son identidades entre los diversos volúmenes de las figuras.

Si te estas preguntado qué ocurre cuando consideramos potencias de orden superior a tres, la respuesta la encontrarás en el llamado *binomio de Newton*. El genio inglés estaba tan orgullo de su descubrimiento que pidió que fuera grabado en su lápida funeraria.

Teorema de Pitágoras

Tal vez el teorema de Pitágoras es el teorema más famoso del mundo. Afirma que en cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, (lados que forman el ángulo recto), esto es:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Aunque recibe el nombre del sabio griego, se sabe que 1000 años antes del nacimiento de Pitágoras (que tuvo lugar alrededor de 569 a.C.), los topógrafos babilónicos ya utilizaban ternas pitagóricas para determinar las medidas de campos en la agricultura. Una terna pitagórica son tres números que verifican la igualdad anterior, por ejemplo (3,4,5) o (5,12,13) y el triángulo cuyos lados forman una terna pitagórica siempre es un triángulo rectángulo.

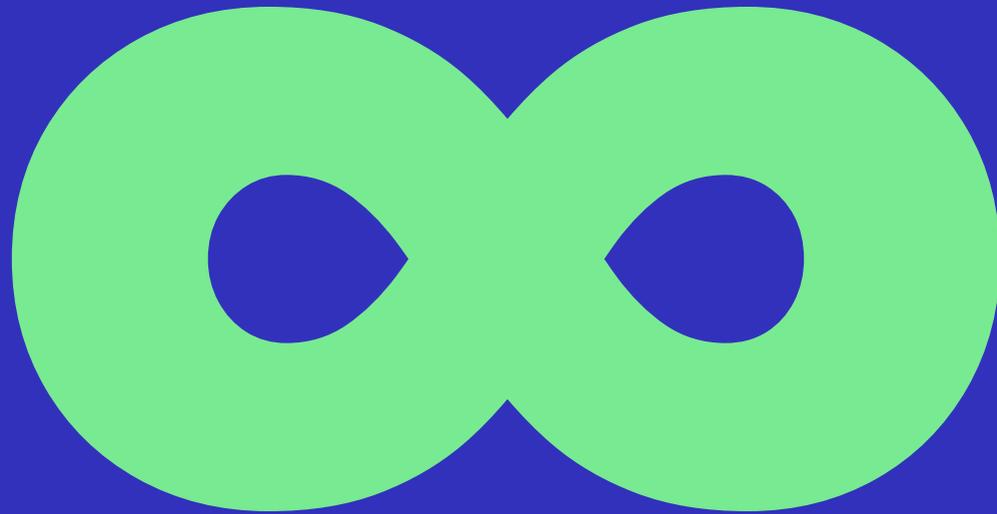
El camino más rápido

El camino más corto entre dos puntos no siempre es la línea recta. La curva de descenso más rápido entre dos puntos se llama curva *braquistócrona*, (del griego *brachistos*, el más corto, y *chronos*, intervalo de tiempo). Y no depende de la masa del objeto ni del valor de la gravedad. La solución del problema fue añadida en 1696 por hermanos Jakob y Johann Bernouilli. Utilizaron el cálculo de variaciones, una novedosa teoría matemática cercana al cálculo diferencial de Newton y Leibniz para determinar esta cicloide.

Esta curva tiene otra interesante propiedad. Es una curva *tautócrona* (del griego *tauto*, mismo y *chrono*, tiempo). Es la curva para la cual el tiempo tomado por un objeto para recorrerla hasta su punto más bajo es independiente de su punto de lanzamiento. Sin rozamiento, el tiempo viene dado por la fórmula:

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}},$$

donde r es el radio de la cicloide que genera la curva y g es la constante de la gravedad. Uno mismo puede comprobar que tarda exactamente lo mismo en llegar hasta el punto más bajo independientemente del lugar del lanzamiento.



Las matemáticas de M.C. Escher

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) es un artista holandés internacionalmente reconocido por sus grabados (xilográficos y mezzotinto) y dibujos de figuras imposibles, teselaciones y mundos imaginarios. En su mundo se reconoce una profunda observación de la realidad que mezcla con sus propias fantasías. Su obra artística muestra extraordinarias manipulaciones del espacio, el tiempo y la perspectiva, reorganizadas conforme a su personal e ingeniosa lógica. Presenta objetos en 2 o 3 dimensiones en espacios paradójicos que desafían los modos habituales de representación.

Escher nunca fue un estudiante sobresaliente y sus conocimientos matemáticos formales se reducían a los que tenía de la educación superior. Comenzó a estudiar Arquitectura por imposición de su padre G.A. Escher, ingeniero hidromecánico y uno de los ocho expertos neerlandeses que trabajaron en Japón por invitación del emperador. Abandonó sus estudios para centrarse en su carrera de artista gráfico, estableciéndose en Roma. A pesar de esta falta de formación, las Matemáticas y la geometría atrajeron al artista como elemento inspirador para la composición de sus obras.

La primera visita de Escher a la Alhambra de Granada en 1922 le descubrió las decoraciones islámicas de los palacios nazaríes, especialmente los recubrimientos cerámicos geométricos. Quedó fascinado por estas particiones del plano, siendo este el punto de partida para sus trabajos posteriores. A su regreso, Escher se esforzó por conferir una estructura rítmica a sus dibujos sin conseguirlo. Durante diez años el tema de la partición regular de una superficie fue un tema tabú.

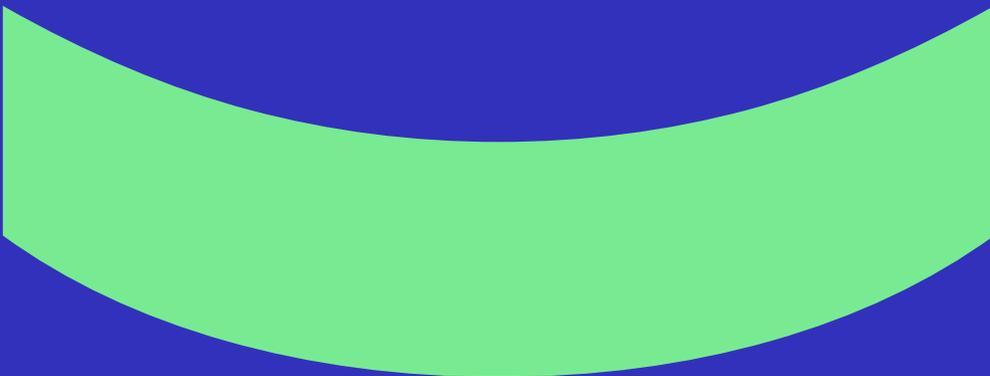
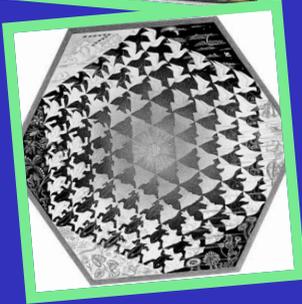
En un segundo viaje a España en junio de 1936, visitó Córdoba, y de nuevo la Alhambra de Granada. Esta vez los bocetos que realizó pusieron los cimientos de su trabajo en su etapa más madura. Encontró el camino que lo convirtieron en uno de los ilustradores más populares de Europa. Sin embargo, el éxito aún tardaría en llegar. De este segundo viaje, Escher guardó un mal recuerdo durante su vida: un policía observó al artista dibujando las viejas murallas de Cartagena. En aquel ambiente prebélico, un extranjero dibujando las instalaciones de defensa de la ciudad, hicieron tomar a Escher por un espía. Tras ser llevado a comisaría, confiscados sus dibujos, y encerrado en los calabozos, fue puesto en libertad, sin sus dibujos y habiendo perdido el barco de regreso. Escher no llegó a ser rico ni famoso en vida. Sus primeras obras de paisajes italianos son tiradas de apenas 20 o



30 copias porque no tenía dinero para hacer más. Con 50 años seguía dependiendo económicamente de sus padres. La suerte empezó a cambiar con el Internacional Congress of Mathematicians (ICM) celebrado en 1954 en Amsterdam. Este evento reúne cada cuatro años a los matemáticos más importantes. Escher fue invitado a organizar una exposición en el Stedelijk Museum. Los asistentes al congreso visitaron en masa la exposición y quedaron profundamente impresionados, en particular el británico sir Roger Penrose y el británico-canadiense Donald Coxeter. Escher mantendría un estrecho contacto con ambos a partir de entonces, inspirándose mutuamente. Coxeter le dio a Escher la idea para la creación de la serie "Circle Limits I-IV" (1958-1960).

Después de ver el grabado "Relativity" (1953) Penrose publicó con su padre Lionel Penrose, psiquiatra y matemático, un artículo sobre figuras imposibles. El intercambio de ideas entre Escher y los Penrose daría lugar a los grabados "Ascending and Descending" (1960) y "Waterfall" (1961).

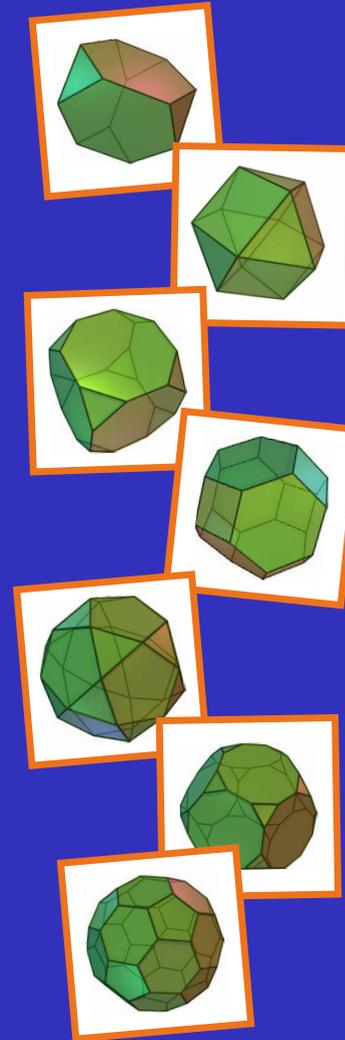
En este pequeño homenaje a M.C. Escher presentamos seis de sus creaciones, explicando algunos conceptos matemáticos que pueden encontrarse en la obra. Invitamos al espectador a detenerse en ellas, imaginarlas, animarlas con su mente y sumergirse en el mágico mundo del autor.



Ventilador holográfico

Los sólidos platónicos o regulares son poliedros cuyas caras son polígonos regulares e iguales. Solamente existen 5 cuerpos con esta condición: tetraedro (4 triángulos), cubo (6 cuadrados), octaedro (8 triángulos), dodecaedro (12 pentágonos) e icosaedro (20 triángulos).

Los sólidos arquimedianos son poliedros cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. Los vértices que se forman son iguales. Los 13 sólidos que cumplen esta condición ya eran conocidos por Arquímedes (de allí su nombre). De los 13, 7 de ellos se obtienen por intersección de un sólido platónico con un plano. Sus nombres son los siguientes.



1. **Tetraedro truncado** (sus caras son 4 triángulos y 4 hexágonos).
2. **Cuboctaedro** (sus caras son 8 triángulos y 6 cuadrados).
3. **Cubo truncado** (sus caras son 8 triángulos y 6 octógonos).
4. **Octaedro truncado** (sus caras son 6 cuadrados y 8 hexágonos).
5. **Icosidodecaedro** (sus caras son 20 triángulos y 12 pentágonos).
6. **Dodecaedro truncado** (sus caras son 20 triángulos y 12 decágonos).
7. **Icosaedro truncado** (sus caras son 12 pentágonos y 20 hexágonos).

La Característica de Euler (χ) de un poliedro se obtiene contando el número de vértices (V), el número de aristas (A) y el número de caras (C) y realizando la siguiente operación, $\chi = V - A + C$. En todos los sólidos platónicos y arquimedianos se cumple que la Característica de Euler (χ) es igual a 2. Vértices, aristas y caras se encuentran unidos por este número. ¿Te atreves a comprobarlo?

Nombre	V	A	C	$\chi = V - A + C$
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2



Secuencias matemáticas

En numerosas situaciones de ficción aparecen las Matemáticas. Pueden servir para justificar la complejidad de una situación, mostrar las extraordinarias habilidades de un personaje superdotado o por el contrario ridiculizar los conocimientos de otros. Presentamos tres de estas cómicas secuencias.

El teorema de Thales (Divertimento Matemático) (1967) Les Luthiers. Cuando su autor, Carlos Núñez Cortés, tenía 19 años y cursaba el segundo curso de Química, no conseguía aprender un enunciado de Análisis Matemático. Finalmente se le ocurrió acoplarle una melodía cantable.

Pensé entonces –recuerda Núñez- si no podría ponerle música a todo un teorema. Fui a mi biblioteca, desempolvé el texto de Repetto, Linskens y Fesquet, ubiqué el teorema de Thales y le puse música. Al día siguiente le canté mi teorema a un grupito de locos lindos del coro de Ingeniería y me lo festejaron.

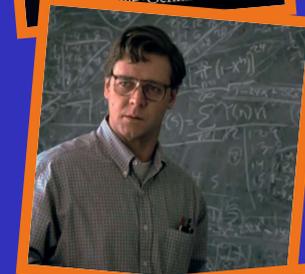
Un día en el colegio. Las aventuras de Gabi, Fofó y Miliki con Fofito (1973). En este divertidísimo episodio, el profesor Gabi les exige a los alumnos Fofó, Miliki y Fofito que completen la tabla del 9 en la pizarra. Evidentemente no se la saben, pero debido a un casual procedimiento consiguen completar perfectamente.

The Big Bang Theory. El capítulo 73 (*La hipótesis del parásito alienígena*, 2010) de esta famosísima serie comienza con una pregunta de Sheldon a Howard, Leonard y Raj “¿Cuál es el mejor número?”. Además aclara, “por cierto, solo hay una respuesta correcta”. La respuesta de Sheldon Cooper, físico teórico y amante de las Matemáticas, es el número 73.

El 73 es el vigésimo primer número primo, leído al revés es el 37, que es el décimo segundo; que al revés es el 21, que es el resultado de multiplicar; agarraos fuerte; 7 por 3. (...) En binario, el 73 es un palíndromo, 1001001, que al revés es 1001001, exactamente igual. Chuck Norris al revés es sólo Sirron Kcuch.

En 2015, los matemáticos y fans de la serie Carl Pomerance and Chris Spicer definieron los llamados “primos de Sheldon” como aquellos que cumplen las propiedades del número 73 y conjeturaron que el 73 era el único número posible (*Conjetura de Sheldon*). Cuatro años más tarde, publicaron la demostración de la conjetura. Los productores de la serie, al oír los avances de los matemáticos, incluyeron algunos cálculos de la demostración en una de las pizarras que habitualmente usa Sheldon en la serie.





Y no solo en series o programas de televisión aparecen las Matemáticas. En las últimas décadas, varias películas sobre Matemáticas se han rodado para la gran pantalla.

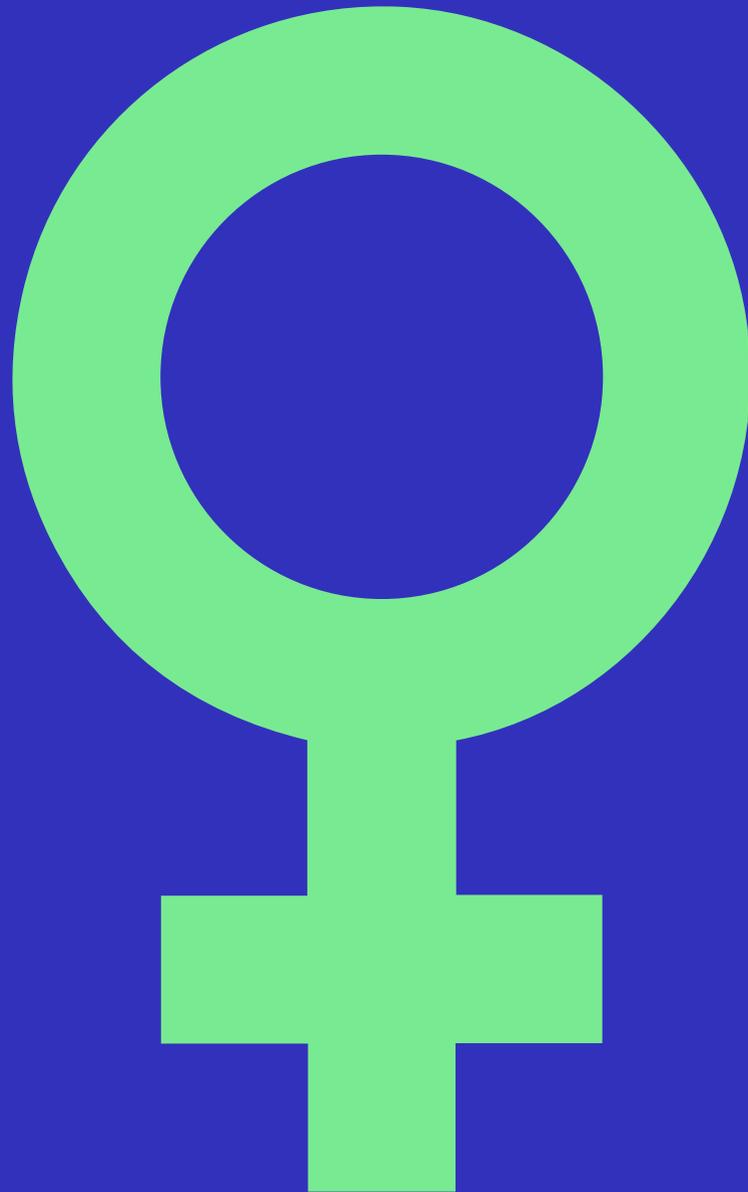
El indomable Will Hunting (1997) relata la historia de un muchacho de 21 años del sur de Boston con un intelecto superdotado. En lugar de explotarlo, trabaja limpiando en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), un centro puntero en investigación, también en Matemáticas. De forma anónima resuelve varios problemas en Combinatoria que atrae la atención del profesorado. Will deberá plantearse cuál es el sentido de la vida, de la amistad y del amor y enfrentarlo a su forma de vivir el día a día sin compromisos.

El Óscar a la Mejor Película en 2001 fue para **Una Mente Maravillosa**. Se centra en la vida del brillante matemático John Forbes Nash. Nash llega a Princeton en 1947 obsesionado con la búsqueda de una idea matemática original. Su trabajo en Teoría de Juegos le vale un puesto en el MIT y el desarrollo de una carrera investigadora llena de éxitos. A la par, tendrá que lidiar con la esquizofrenia que sufre desde su juventud. En 1994 John Nash recibió el premio Nobel de Economía por sus numerosas aportaciones en Teoría de Juegos aplicable a la Economía.

La película **Ágora** (2009) dirigida por Alejandro Amenábar es un drama histórico que se desarrolla en la ciudad de Alejandría (Egipto). Cuenta la trayectoria vital de Hipatia de Alejandría, matemática, filósofa y astrónoma, que fue asesinada por los seguidores del obispo cristiano copto Cirilo de Alejandría en el año 415 d.C. Hija del astrónomo Teón, escribió sobre geometría, álgebra y astronomía y es considerada una pionera en la historia de las mujeres en la ciencia.

El hombre que conocía el infinito (2015) es una película biográfica sobre Srinivasa Ramanujan (1887-1920), matemático indio que después de crecer en la India Colonial, es admitido en la prestigiosa Universidad de Cambridge. Su mentor G.H. Hardy reconoce su genio en la carta con la que se presenta. Con su ayuda, se enfrentará a las difíciles situaciones que sus compañeros conservadores le imponen y a la vida diaria que sufre el país con el inicio de la Primera Guerra Mundial.

El docudrama **La mujer que soñaba con números** (2020) de la directora Mirella R. Abrisqueta recupera la figura de la zaragozana María Andresa Casamayor (1720-1780), autora del primer libro de ciencia que se conserva en España. El *Tyrocinio arithmetico*, *Instrucción de las quatro reglas llanas* (Zaragoza, 1738) es un breve tratado aritmético que muestra con ejemplos prácticos cómo se manejan las cuatro operaciones aritméticas básicas: la suma, la resta, la multiplicación y la división.



Sin ellas las Matemáticas no serían igual...

Algunas de ellas necesitaron permisos especiales de las autoridades para poder estudiar la ciencia de los números. Otras se desconocen si existieron realmente. Pero la presencia femenina en las Matemáticas es indudable y en gran parte olvidada. Actualmente la investigación histórica trata de recuperarlas, pioneras en la ciencia, son ejemplos de superación, dedicación y talento. A continuación, presentamos algunas de estas mujeres españolas extraordinarias.



Tal vez la primera científica de la península ibérica fuera **Fátima de Madrid**, hija del astrónomo musulmán Mosama ben Ahmed en el reino musulmán Al-Ándalus. Se cree que vivió entre el siglo X y XI y ayudó a su padre en la redacción de varias de sus obras, entre otras, el Tratado sobre el Astrolabio, que se conserva en el Real Monasterio de El Escorial. Existe controversia sobre si realmente existió desde su primera misteriosa aparición en 1924 en la Enciclopedia Espasa.

La zaragozana e ilustrada **Josefa Amar y Borbón** (1749-1833) fue una pedagoga y escritora que en diversas obras trata la situación de las mujeres en su época. En su Discurso en defensa del talento de las mujeres y de su actitud para el gobierno (1786) afirma:

“Ninguno que esté medianamente instruido negará que en todos tiempos y en todos los países ha habido mujeres que han hecho progresos hasta en las ciencias más abstractas”

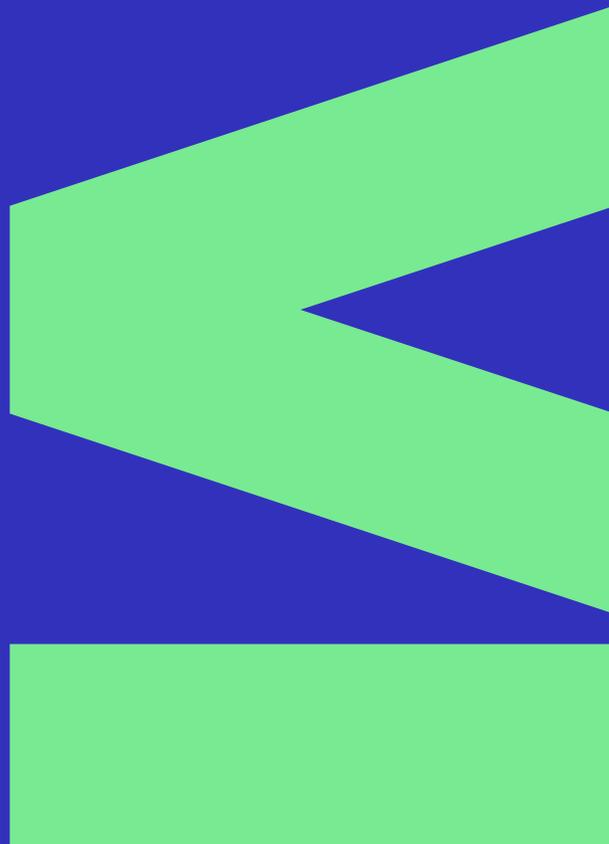
Incluso se conoce que la propia Josefa Amar y Borbón compuso una Aritmética española que nunca llegó a publicarse y que fue recogida en la obra enciclopédica de Félix de Latassa, Biblioteca nueva de escritores aragoneses (1801).

La situación privilegiada de **María Isidra de Guzmán y de la Cerda** (1767-1803) como miembro de la aristocracia, le facilitó que el monarca Carlos III autorizara su formación. Fue la primera mujer en conseguir el título de Doctor en 1784 en la Universidad de Alcalá con 17 años. En su examen, que se conserva en la Biblioteca Nacional, tuvo que responder, entre otras, preguntas sobre la geometría de Euclides y la astronomía en obras de Copérnico, Kepler y Newton.

Durante el siglo XIX se produce un lento pero progresivo avance las mujeres en las Matemáticas. De los 359

socios fundadores de la fundación de la Real Sociedad Matemática Española en 1911, solo dos son mujeres, **Josefa Barrera Camús** y **María de la Encarnación Rigada**, profesoras de la Escuela Normal de Maestras de Madrid.

La primera Doctora en Matemáticas en España fue **María del Carmen Martínez Sancho** quien consiguió su título y su Cátedra de Instituto en 1928, al igual que **María Capdevila D'Oriola**. Ambas siguieron caminos paralelos ya previamente había sido becadas para investigar en el extranjero, Martínez Sancho en Berlín y Capdevila en París. La Guerra Civil supuso un brutal parálisis y retroceso en la Ciencia en España. En particular, el camino y los logros obtenidos por las mujeres en las Matemáticas tardarán décadas en recuperarse.



Las Matemáticas, fractales y colaborativas

La palabra fractal (del latín, *fractus*, 'quebrado', 'fracturado') fue la elegida por el matemático Benoit Mandelbrot en 1975 para describir unos objetos matemáticos muy singulares. Tienen las mismas propiedades en cualquier escala a las ya observadas a nivel global. Son autosemejantes, es decir, que están formadas por partes que son semejantes al conjunto total. Además tienen una descripción algorítmica simple, es decir, su construcción se basa en un algoritmo sencillo.

Las estructuras fractales están presentes en la naturaleza: por ejemplo en helechos, copos de nieve, romanescos, costas marinas o grietas de las sequías. El propio Mandelbrot escribió:

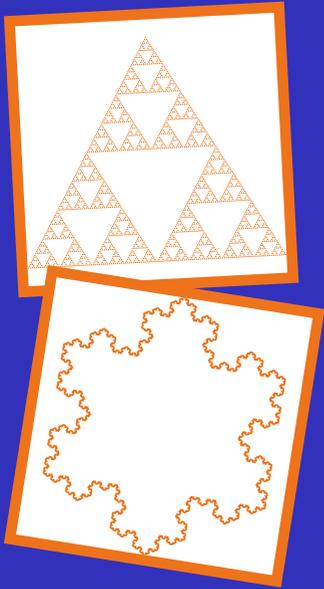
«Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos y la corteza de los árboles no es lisa, ni los rayos viajan en línea recta»

Mandelbrot era investigador de la empresa IBM en el Centro de Investigación Thomas J. Watson. La incipiente red de ordenadores tenía un problema de comunicaciones que los técnicos no podían solucionar. El ruido de las líneas telefónicas parecía insalvable, aparecían interferencias y con ellas errores continuos. Mandelbrot ideó un método para describir la distribución de errores en el flujo de información. Notó que en los periodos de aparición de errores, por pequeños que fueran, eran seguidos por periodos de transmisión limpia de ruidos. Su intuición matemática le llevó a descubrir una relación entre los periodos de error y los periodos de transmisión limpia, una relación geométrica y que podía ser representada fácilmente. Había descubierto una estructura fractal.

Sin embargo, el estudio matemático de los primeros objetos fractales se produjo en el periodo 1875-1925. Una profunda crisis en la definición de dimensión, longitud y medida de conjuntos hace que en 1890 el matemático alemán Georg Cantor presentara su famoso conjunto. El ahora conocido como conjunto de Cantor desafía a la lógica al tener longitud cero y tantos puntos como una recta de longitud infinita.

La curva de Koch (o copo de nieve) fue ideada por Helge von Koch en 1904 como ejemplo de curva de longitud infinita contenida en un recinto acotado y sin tangente

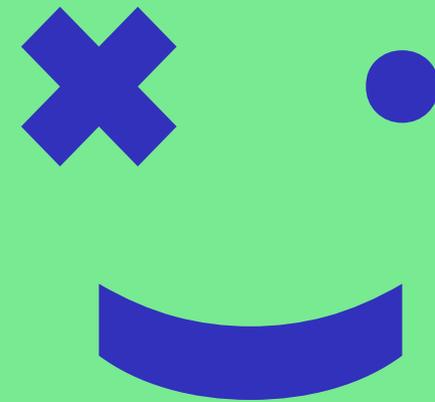




en cualquier punto. Su construcción se hace mediante un proceso similar al del conjunto de Cantor.

El triángulo de Sierpinski fue ideado por el polaco Waclaw Sierpinski en 1915. Se parte de un triángulo equilátero de lado 1. El primer paso consiste en dividirlo en cuatro triángulos equiláteros iguales (lo que se consigue uniendo los puntos medios de los lados) y eliminar el triángulo central, es decir nos quedamos con los tres triángulos equiláteros de los vértices. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los tres triángulos obtenidos en el paso anterior. Y se repite el proceso infinitas veces, obteniendo como resultado final el triángulo de Sierpinski.

¿Nos ayudas a crear triángulos de Sierpinski, reciclando, pensando?



enjoy !
maths!

